

**В.С. Русаков, А.И. Слепков
Е.А. Никанорова, Н.И. Чистякова**

МЕХАНИКА. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 010700.62 «Физика»
и по специальности 010701.65 «Физика»*



Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2010

В.С. Русаков, А.И. Слепков, Е.А. Никанорова,
Н.И. Чистякова. **Механика. Методика решения задач** / Учебное
пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. 368 с.
ISBN 978-5-8279-0084-9

Учебное пособие по решению задач механики написано на основании многолетнего опыта проведения занятий по физике на физическом факультете МГУ. При этом авторы стремились использовать в первую очередь наиболее характерные и типичные задачи. С этой целью наряду с оригинальными задачами были использованы формулировки условий задач из существующих учебников, задачников и учебных пособий, которые подвергались существенному исправлению и доработке.

Пособие разбито по главам, каждая из которых включает в себя теоретический материал, основные типы задач и методы их решения, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Настоящее пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и имеет целью помочь им овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач механики.

Рецензенты: д.ф.-м. н., профессор *Г.С. Плотников*,
д.ф.-м. н., профессор *А.С. Илюшин*

ISBN 978-5-8279-0084-9

© Физический факультет МГУ
им. М.В. Ломоносова, 2010 г.
© Коллектив авторов, 2010 г.

**К читателям серии пособий
«УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ»**

На кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова создан и готовится к изданию «Университетский курс общей физики», предназначенный для студентов физических специальностей вузов.

Курс охватывает четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электromагнетизм» и «Оптика». Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из четырех пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум» и «Методика решения задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент».

Пособием, позволяющим развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач», которое составлено с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться для самостоятельной работы. Весь материал разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, в каждой работе сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава 1. Кинематика материальной точки и простейших систем	9
1.1. Теоретический материал	9
1.2. Основные типы задач и методы их решения	16
1.2.1. Классификация задач кинематики	16
1.2.2. Общая схема решения задач кинематики	16
1.3. Примеры решения задач	17
1.4. Задачи для самостоятельного решения.....	39
Глава 2. Динамика материальной точки и простейших систем	45
2.1. Теоретический материал	45
2.1.1. Законы Ньютона	45
2.1.2. Законы, описывающие индивидуальные свойства сил	46
2.2. Основные типы задач и методы их решения	51
2.2.1. Классификация задач динамики	51
2.2.2. Общая схема решения задач динамики с помощью законов Ньютона	51
2.3. Примеры решения задач	52
2.4. Задачи для самостоятельного решения	75
Глава 3. Законы изменения импульса и механической энергии системы материальных точек.....	80
3.1. Теоретический материал	80
3.1.1. Импульс механической системы	80
3.1.2. Работа сил	83
3.1.3. Энергия механической системы.....	87
3.1.4. Столкновение тел	89
3.2. Основные типы задач и методы их решения	89
3.2.1. Классификация задач	89
3.2.2. Общая схема решения задач	90
3.3. Примеры решения задач	91
3.4. Задачи для самостоятельного решения	112
Глава 4. Движение материальной точки в неинерциальных системах отсчета. Силы инерции	116
4.1. Теоретический материал	116
4.2. Основные типы задач и методы их решения	119
4.2.1. Классификация задач	119
4.2.2. Общая схема решения задач механики в неинерциальных системах отсчета с использованием законов Ньютона	120

4.3. Примеры решения задач	121
4.4. Задачи для самостоятельного решения	142
Глава 5. Кинематика в теории относительности	146
5.1. Теоретический материал	146
5.1.1. Постулаты и основные понятия (специальной) теории относительности	146
5.1.2. Преобразования Лоренца	147
5.1.3. Следствия преобразований Лоренца	149
5.1.4. Пространственно-временной интервал	151
5.1.5. Преобразование (сложение) скоростей	154
5.2. Основные типы задач и методы их решения	155
5.2.1. Классификация задач кинематики в теории относительности	155
5.2.2. Общая схема решения задач кинематики в теории относительности	156
5.3. Примеры решения задач	157
5.4. Задачи для самостоятельного решения	180
Глава 6. Кинематика и динамика абсолютно твердого тела	184
6.1. Теоретический материал	184
6.1.1. Кинематика абсолютно твердого тела	184
6.1.2. Динамика абсолютно твердого тела	190
6.2. Основные типы задач и методы их решения.....	198
6.2.1. Классификация задач кинематики и динамики абсолютно твердого тела	198
6.2.2. Общая схема решения задач кинематики и динамики абсолютно твердого тела	199
6.3. Примеры решения задач	200
6.3.1. Кинематика абсолютно твердого тела	200
6.3.2. Динамика абсолютно твердого тела	208
6.4. Задачи для самостоятельного решения	226
Глава 7. Законы сохранения момента импульса и энергии.	
Гироскопы. Гироскопические силы	231
7.1. Теоретический материал	231
7.2. Основные типы задач и методы их решения	237
7.2.1. Классификация задач	237
7.2.2. Общая схема решения задач	237
7.3. Примеры решения задач	238
7.3.1. Законы сохранения импульса и механической энергии ..	238
7.3.2. Гироскопы. Гироскопические силы	258
7.4. Задачи для самостоятельного решения	266

Глава 8. Свободные и вынужденные колебания систем с одной степенью свободы. Резонанс	270
8.1. Теоретический материал	270
8.1.1. Собственные гармонические колебания	271
8.1.2. Собственные затухающие колебания	277
8.1.3. Вынужденные колебания. Резонанс	281
8.2. Основные типы задач и методы их решения	284
8.2.1. Классификация задач	284
8.2.2. Общая схема решения задач	285
8.3. Примеры решения задач	285
8.4. Задачи для самостоятельного решения	322
Глава 9. Бегущие и стоячие волны. Моды и нормальные частоты ..	326
9.1. Теоретический материал	326
9.1.1. Волновое уравнение	326
9.1.2. Плоские волны	327
9.1.3. Сферические волны	329
9.1.4. Скорости распространения упругих волн в различных средах	331
9.1.5. Энергетические соотношения	336
9.1.6. Продольный эффект Доплера (классический)	338
9.1.7. Собственные колебания распределенных систем	339
9.2. Основные типы задач и методы их решения	344
9.2.1. Классификация задач	344
9.2.2. Общая схема решения задач	345
9.3. Примеры решения задач	346
9.4. Задачи для самостоятельного решения	362
Литература	365

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методическое пособие по решению задач механики предназначается для студентов физических специальностей высших учебных заведений и написано на основе многолетнего опыта проведения авторами занятий по общей физике со студентами физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Опыт проведения занятий показывает, что в настоящее время, к сожалению, наблюдается заметное снижение среднего уровня подготовки выпускников средних учебных заведений в области физики при сохранении высокого уровня у относительно небольшой части вчерашних школьников. Преподаватели вынуждены ориентироваться на среднего студента, и не имеют возможности рассматривать на семинарах задачи повышенной сложности. Поэтому возрастает роль методических пособий, ориентированных на самостоятельную работу студентов.

Нами написано методическое пособие по решению задач механики для студентов первого курса, в котором изложены основные методы решения задач различных типов и приведены основные теоретические сведения по каждой теме, необходимые при решении задач. Целью данного пособия является:

- 1) помочь студентам овладеть основными методами решения задач механики;
- 2) дать возможность сильным студентам не ограничиваться задачами среднего уровня, разбираемыми на семинарских занятиях, а ознакомиться с решением задач повышенной сложности.

Учебное пособие состоит из оглавления, девяти глав и списка литературы. Разбиение на главы проведено в соответствии с темами семинарских занятий со студентами первого курса физического факультета МГУ.

Структура изложения всех тем одинакова, причем каждая глава включает в себя следующие разделы:

- 1) теоретический материал,
- 2) основные типы задач и методы их решения,
- 3) примеры решения задач,
- 4) задачи для самостоятельного решения.

Теоретический материал, представленный в начале каждой главы, содержит основные определения физических понятий и величин, формулировки законов, а также необходимые для решения

задач формулы. Основные физические понятия выделены в тексте жирным шрифтом. Часть формул, приведенных в Теоретическом материале каждой главы, сопровождается кратким выводом. При изложении теоретического материала были использованы широко известные учебники, учебные пособия и справочная литература, список которых приведен в конце книги.

В пособии дается классификация задач по каждой теме и предлагаются методы их решения. В каждой главе приведено подробное решение 10 – 12 задач и предложено 10 – 12 задач для самостоятельного решения с ответами. Авторы стремились использовать в первую очередь наиболее характерные задачи. С этой целью наряду с оригинальными задачами были использованы формулировки условий задач из существующих учебников, задачников и учебных пособий, которые подвергались существенному исправлению и коррекции. Решение каждой задачи излагается в соответствии с предложенной в Теоретическом материале общей схемой решения задач по данной теме и сопровождается рисунками с изображением кинематических и динамических характеристик рассматриваемой системы тел.

Особое внимание при изложении материала уделяется выбору моделей материальных объектов и явлений на начальном этапе решения задачи. Особенностью предлагаемого методического пособия является также изложение различных методов решения конкретной задачи и их сравнение.

Пособие, изданное по главам небольшим тиражом, прошло апробацию. Преподаватели, ведущие занятия на первом курсе физического факультета МГУ, в течение трех лет использовали его при проведении занятий и высказали свои замечания и предложения, которые были учтены авторами при подготовке книжного варианта. Авторы выражают глубокую благодарность всем преподавателям кафедры общей физики физического факультета МГУ за плодотворные дискуссии и ценные замечания, высказанные в процессе написания данного учебного пособия.

ГЛАВА 1 КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

1.1. Теоретический материал

Физическая величина – это количественная характеристика свойства материальных объектов или явлений (процессов). Каждая физическая величина устанавливается однозначным способом ее измерения – экспериментального определения или расчета. Определение физической величины указывает принципиальный способ ее измерения.

Физическое понятие (модель объекта или явления) – это абстракция (филос.), которая отражает только основные, наиболее существенные, свойства материальных объектов или явлений (процессов).

Критерий правильности выбора модели. Если в данной задаче физическая величина, описывающая неосновное свойство, от которого мы абстрагируемся, много меньше другой, характерной для этой задачи, величины той же размерности, то модель выбрана верно.

Заметим, что один и тот же материальный объект или одно и то же явление в различных условиях могут быть рассмотрены в рамках различных моделей, если они удовлетворяют критериям правильности выбора этих моделей.

Тело отсчета – тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

Часы – неподвижный относительно тела отсчета прибор для измерения времени, принцип действия которого основан на сравнении длительности исследуемого временного интервала с длительностью выбранного за эталон периодического процесса.

Система отсчета – совокупность системы координат¹, связанной с телом отсчета, и набора синхронизированных часов, размещенных в разных точках координатной системы.

Условие синхронизации часов А и В, расположенных в разных точках системы отсчета (в предположении об изотропности пространства):

¹ Далее в тексте, если это не оговаривается особо, используется декартова система координат.

$$t^B = \frac{t_1^A + t_2^A}{2}. \quad (1.1)$$

Здесь t_1^A – момент времени излучения из точки А светового сигнала (кванта света) по часам в точке А, t^B – момент времени регистрации этого сигнала в точке В по часам в точке В, t_2^A – момент времени регистрации в точке А отраженного в точке В сигнала по часам в точке А.

Материальная точка – физическое понятие (модель, абстракция), представляющее тело, размерами (и формой) которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Положение материальной точки относительно данной системы отсчета (в данной системе отсчета) S задается ее координатами или радиус-вектором $\mathbf{r}$.

Радиус-вектор материальной точки $\mathbf{r}$ относительно данной системы отсчета – вектор, начало которого находится в начале координат этой системы, а конец – в месте расположения материальной точки (см. рис. 1.1а):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \{x, y, z\}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат: $|\mathbf{i}|=1$, $|\mathbf{j}|=1$, $|\mathbf{k}|=1$; x, y, z – координаты материальной точки.

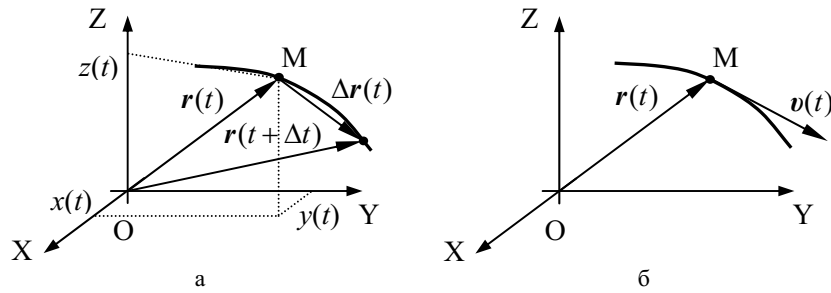


Рис. 1.1. Радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$, перемещение $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ (а) и скорость $\mathbf{v}(t)$ (б) материальной точки

Закон движения материальной точки относительно данной системы отсчета – зависимость радиус-вектора или координат материальной точки от времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t); \\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Траектория движения материальной точки – линия, описываемая в пространстве концом радиус-вектора материальной точки.

Уравнение траектории задается совокупностью двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

которые можно получить, исключая время из закона движения в координатной форме (1.3). Заметим, что сам закон движения в координатной форме представляет собой уравнение траектории, заданное в параметрическом виде.

Перемещение материальной точки $\Delta \mathbf{r}(t)$ – изменение радиус-вектора материальной точки за время Δt с момента времени t (рис. 1а):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \\ &= \{x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Скорость материальной точки $\mathbf{v}$ относительно данной системы отсчета – физическая величина, равная производной радиус-вектора материальной точки по времени (производная берется при постоянных ортах системы координат, поскольку они жестко связаны с телом отсчета):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \{v_x(t), v_y(t), v_z(t)\} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где v_x , v_y , v_z – проекции скорости $\mathbf{v}$ на соответствующие оси системы координат. Скорость $\mathbf{v}$ можно представить в виде суммы составляющих скорости вдоль осей системы координат:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k}. \quad (1.7)$$

При этом модуль скорости v равен

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.8)$$

В соответствии с определением скорость всегда направлена по касательной к траектории (см. рис. 1.16).

Зная **закон изменения скорости материальной точки** $v(t)$, и радиус-вектор $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}(t_0)$ в начальный момент времени t_0 , можно найти закон движения:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt. \quad (1.9)$$

Путь $s(t)$, пройденный материальной точкой вдоль траектории (длина траектории) за время t , равен

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt, \quad (1.10)$$

при этом модуль скорости $v(t)$ в любой момент времени равен

$$v(t) \equiv |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t). \quad (1.11)$$

Ускорение материальной точки $\mathbf{a}$ относительно данной системы отсчета – физическая величина, равная производной скорости материальной точки по времени (при постоянных ортах системы координат):

$$\mathbf{a}(t) = \{\dot{a}_x(t), \dot{a}_y(t), \dot{a}_z(t)\} \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) = \{\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)\}, \quad (1.12)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения $\mathbf{a}$ на соответствующие оси системы координат. Ускорение $\mathbf{a}$ можно представить в виде суммы составляющих ускорения вдоль осей системы координат:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v}_x(t)\mathbf{i} + \dot{v}_y(t)\mathbf{j} + \dot{v}_z(t)\mathbf{k} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}. \quad (1.13)$$

При этом модуль ускорения $\mathbf{a}$ равен

$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.14)$$

Зная закон изменения ускорения материальной точки $\mathbf{a}(t)$, а также скорость $\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{v}(t_0)$ и радиус-вектор $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}(t_0)$ в начальный момент времени t_0 , можно найти закон изменения скорости и закон движения:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{t'} \mathbf{a}(t') dt' \right) dt. \quad (1.16)$$

Начальные условия для материальной точки – значения радиус-вектора и скорости в начальный момент времени t_0 относительно заданной системы отсчета:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Тангенциальное ускорение $\mathbf{a}_\tau$ – составляющая ускорения $\mathbf{a}$ вдоль направления скорости $\boldsymbol{\tau}$ (см. рис. 1.2):

$$\boldsymbol{\tau}(t) \equiv \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad |\boldsymbol{\tau}(t)| = 1, \quad \mathbf{a}_\tau(t) = a_\tau(t)\boldsymbol{\tau}(t), \quad (1.18)$$

$$a_\tau(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t), \quad (1.19)$$

где $a_\tau(t)$ – проекция ускорения $\mathbf{a}$ на направление скорости $\boldsymbol{\tau}$.

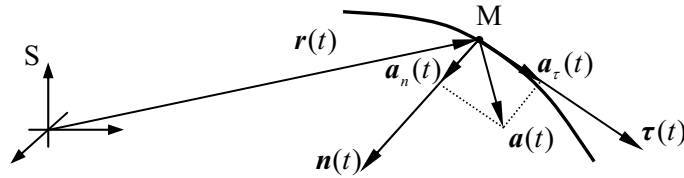


Рис. 1.2. Ускорение материальной точки $\mathbf{a}$ и ее тангенциальная $\mathbf{a}_\tau$ и нормальная $\mathbf{a}_n$ составляющие

Движение материальной точки при $a_\tau(t) > 0$ – **ускоренное**, при $a_\tau(t) < 0$ – **замедленное**, при $a_\tau(t) = 0$ – **равномерное**, а при $a_\tau(t) = \text{const} \neq 0$ – **равнопеременное**.

Нормальное ускорение $\mathbf{a}_n$ – составляющая ускорения $\mathbf{a}$, перпендикулярная направлению скорости (рис. 1.2):

$$\mathbf{a}_n(t) = a_n(t)\mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(t) \perp \boldsymbol{\tau}(t), \quad |\mathbf{n}(t)| = 1, \quad (1.20)$$

где $a_n(t)$ – проекция ускорения $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{n}$, перпендикулярное скорости и направленное к центру кривизны траектории.

Нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны траектории – центру окружности максимального радиуса (радиуса

кривизны траектории), касательной к траектории в данной точке, при этом

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \geq 0, \quad (1.21)$$

где $\rho(t) \equiv \frac{ds}{d\alpha}$ – радиус кривизны траектории в данной точке, а $d\alpha$ – угол между скоростями в моменты времени t и $t + dt$.

Ускорение $\mathbf{a}$ можно представить в виде суммы нормального $\mathbf{a}_n$ и тангенциального $\mathbf{a}_\tau$ ускорений:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_n(t) + \mathbf{a}_\tau(t). \quad (1.22)$$

При этом модуль ускорения $\mathbf{a}$ равен

$$a(t) = \sqrt{a_n^2(t) + a_\tau^2(t)}. \quad (1.23)$$

В соответствии с (1.21) и (1.22) ускорение всегда отклонено от направления скорости в сторону центра кривизны траектории в данной точке, то есть внутрь траектории (см. рис. 1.2).

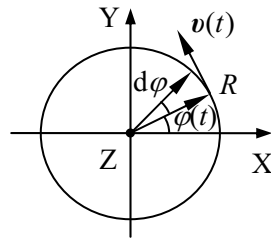


Рис. 1.3. Кинематические характеристики материальной точки при ее движении по окружности

В частном случае движения материальной точки по окружности, т.е. движения в плоскости по траектории с постоянным радиусом кривизны – $\rho(t) = R$ (рис. 1.3), можно ввести **угловую скорость** $\omega(t)$ и **угловое ускорение** $\beta(t)$:

$$\begin{aligned} \omega(t) &\equiv \frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv \dot{\varphi}(t) = \frac{v(t)}{R}, \\ \beta(t) &\equiv \dot{\omega}(t) = \frac{\dot{v}(t)}{R} = \frac{a_\tau(t)}{R}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

При этом:

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{v^2(t)}{R} = \omega^2(t)R, \\ a_\tau(t) &= \dot{\omega}(t)R. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Механическая система – совокупность материальных тел.

Система материальных точек – совокупность тел, каждое из которых можно считать материальной точкой. Далее будем счи-

тать, что всякую рассматриваемую нами механическую систему можно рассматривать как систему материальных точек.

Абсолютно твердое тело – тело (система материальных точек), расстояния между двумя любыми материальными точками которого не меняются в условиях данной задачи.

Поступательное движение абсолютно твердого тела – движение, при котором прямая, соединяющая любые две материальные точки тела, перемещается параллельно самой себе.

Принцип суперпозиции движений – в случае поступательного движения системы отсчета S' относительно системы S (рис. 1.4) радиус-вектор (скорость, ускорение) произвольной материальной точки относительно системы S равен сумме радиус-векторов (скоростей, ускорений) начала отсчета O' системы S' и той же материальной точки относительно системы S' :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_{O'}(t) + \mathbf{r}'(t), \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_{O'}(t) + \mathbf{v}'(t), \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}_{O'}(t) + \mathbf{a}'(t). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь $\mathbf{v}_{O'}$ и $\mathbf{a}_{O'}$ – **переносные скорость и ускорение** соответственно.

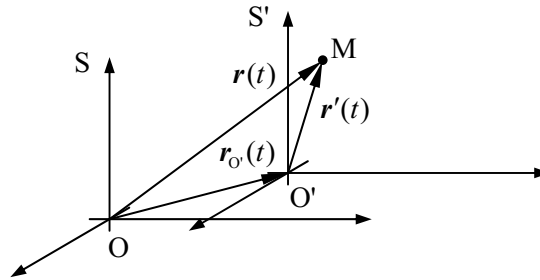


Рис. 1.4. Положение материальной точки M относительно двух поступательно движущихся систем отсчета S и S'

Уравнения кинематической связи – уравнения, связывающие кинематические характеристики различных тел системы:

$$\begin{aligned} f_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) &= 0, \\ f_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) &= 0, \\ f_a(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N) &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Существуют два способа нахождения уравнений кинематической связи.

Способ 1. Принцип независимых перемещений. Перемещение какого-либо тела в системе связанных тел складывается из так называемых «независимых» перемещений, каждое из которых обусловлено (вызвано) перемещением соответствующего другого тела системы при покоящихся остальных телах:

$$\Delta \mathbf{r}_i = \sum_{k \neq i} \Delta \mathbf{r}_i^k. \quad (1.28)$$

Способ 2. Записать величины постоянных кинематических характеристик элементов связей (нитей, штанг, блоков, поверхностей и т.д.) через координаты тел системы, используя свойства этих элементов (нерастяжимость, неподвижность, недеформируемость), и продифференцировать эти величины по времени.

1.2. Основные типы задач и методы их решения

1.2.1. Классификация задач кинематики

Основной задачей кинематики является определение кинематических характеристик тел, движущихся относительно данной системы отсчета.

Большинство задач кинематики можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям:

- 1) кинематика материальной точки,
- 2) принцип суперпозиции движений,
- 3) уравнения кинематической связи,
- 4) кинематика простейших механических систем.

Как правило, один из типов задач имеет основное, другие – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

1.2.2. Общая схема решения задач кинематики

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).

3. Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать в проекциях на оси координат:
 - а) законы движения,
 - б) законы изменения скорости,
 - в) законы изменения ускорения.
2. Записать начальные условия.
3. Записать уравнения кинематических связей.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечания.

В случае решения задач на кинематику материальной точки в пп. I.3 – II.2 речь идет о кинематических характеристиках материальной точки, а п. II.3 надо опустить.

В случае решения задач на кинематику простейших механических систем в пп. I.3 – II.2 речь идет о кинематических характеристиках тел рассматриваемой системы.

Пункты II.1 – II.3 (в том числе II.2.а – II.2.в) можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от типа задачи.

1.3. Примеры решения задач

Задача 1.1

(Кинематика материальной точки)

Скорость материальной точки зависит от ее положения в декартовой системе координат следующим образом: $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + b\mathbf{xj}$, где

c и b – положительные постоянные величины. В начальный момент времени радиус-вектор материальной точки равен нулю: $\mathbf{r}(0) = 0$. Определить:

- а) законы движения $\mathbf{r}(t)$, изменения скорости $\mathbf{v}(t)$ и ускорения $\mathbf{a}(t)$, тангенциальную $a_\tau(t)$ и нормальную $a_n(t)$ проекции ускорения;
- б) уравнение траектории $y(x)$ материальной точки;
- в) радиус кривизны траектории $\rho(t)$;
- г) угол $\varphi(t)$ между скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$.

Решение

Следуем общей схеме решения задач кинематики материальной точки и простейших систем.

I. По условию задачи движение происходит в плоскости XY , образованной координатными осями, направления которых заданы ортами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

II. Запишем начальные условия и закон изменения скорости тела в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0, \\ v_x(0) = c, v_y(0) = b \cdot 0 = 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} = c, \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = bx(t). \end{cases} \quad (1.30)$$

III. Записанные дифференциальные уравнения относительно координат материальной точки (1.29) с учетом начальных условий (1.29) позволяют найти закон движения материальной точки в проекциях на оси координат и зависимость от времени радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = ct, \\ y(t) = \frac{cbt^2}{2}, \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{r}(t) = ct\mathbf{i} + \frac{cbt^2}{2}\mathbf{j}. \quad (1.32)$$

Используя найденную зависимость $x(t)$ (1.31), определим закон изменения скорости $\mathbf{v}(t) = c\mathbf{i} + bx(t)\mathbf{j}$ и закон изменения ускорения $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = c\mathbf{i} + cbt\mathbf{j}, \quad (1.33)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = cb\mathbf{j}. \quad (1.34)$$

Уравнение траектории находится из закона движения материальной точки путем исключения из (1.31) времени t :

$$y(x) = \frac{cb}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2} = \frac{b}{2c} x^2. \quad (1.35)$$

Остальные искомые величины определяются в соответствии с формулами, приведенными в п. 1 данной Главы.

Модуль скорости (1.7) равен:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 + c^2 b^2 t^2}. \quad (1.36)$$

Проекции ускорения $a_\tau(t)$ и $a_n(t)$ (1.19, 1.23) получим в виде:

$$\begin{cases} a_\tau(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{c^2 b^2 t}{\sqrt{c^2 + c^2 b^2 t^2}} = \frac{cb^2 t}{\sqrt{1 + b^2 t^2}}, \\ a_n(t) = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{c^2 b^2 - \frac{c^2 b^4 t^2}{1 + b^2 t^2}} = \frac{cb}{\sqrt{1 + b^2 t^2}}. \end{cases} \quad (1.37)$$

Радиус кривизны траектории (1.21) равен:

$$\rho(t) = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(c^2 + c^2 b^2 t^2) \sqrt{1 + b^2 t^2}}{cb} = \frac{c}{b} (1 + b^2 t^2)^{3/2}. \quad (1.38)$$

Угол $\varphi(t)$ между скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$ определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{cb}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + b^2 t^2}}{cb^2 t} = \frac{cb}{cb^2 t} = \frac{1}{bt}. \quad (1.39)$$

Заметим, что материальная точка движется по параболической траектории (1.35) с постоянным ускорением, направленным вдоль оси Y (1.34). На рис. 1.5 схематично изображена траектория движения материальной точки и изображены векторы ускорения и начальной скорости.

Нетрудно видеть, что при $t = 0$ решения соответствуют начальным условиям задачи. При этом тангенциальное ускорение в указанный момент времени равно нулю, радиус кривизны траектории в данный момент времени

$$\rho = \frac{c}{b},$$

а угол между скоростью и ускорением $\varphi = \pi/2$.

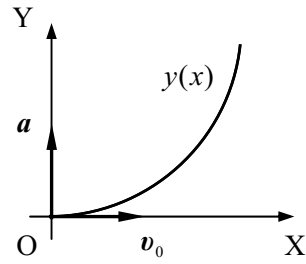


Рис. 1.5

При $t \rightarrow \infty$ значения координат точки и модуль скорости, как и следовало ожидать, неограниченно возрастают, нормальное ускорение и угол между скоростью и ускорением стремятся к нулю, а радиус кривизны траектории – к бесконечности.

Задача 1.2

(Кинематика материальной точки)

Находящееся на высоте H над Землей тело бросили горизонтально с начальной скоростью v_0 . Найти закон движения тела, уравнение траектории, законы изменения скорости и ускорения, а также нормальную и тангенциальную проекции ускорения и радиус кривизны траектории в произвольный момент времени.

Решение

I. Нарисуем чертеж и изобразим на нем заданную в условии задачи скорость тела v_0 в начальный момент времени ($t = 0$) и предполагаемую траекторию движения тела (рис. 1.6).

Выберем систему отсчета, связанную с Землей. Ось X декартовой системы координат направим горизонтально вдоль поверхности Земли по направлению начальной скорости v_0 , а ось Y – вертикально вверх на положение тела в начальный момент времени. Будем считать, что тело является материальной точкой, а движение тела у поверхности Земли происходит с постоянным ускорением свободного падения g .

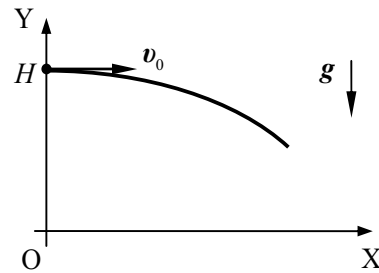


Рис. 1.6

II. В соответствии с выбранной системой отсчета и выбранными моделями тела и его движения запишем начальные условия и закон изменения ускорения тела в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = H, \\ v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0; \end{cases} \quad (1.40)$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g. \end{cases} \quad (1.41)$$

III. Записанные дифференциальные уравнения относительно проекций скорости материальной точки с учетом начальных значений позволяют найти закон изменения скорости тела $\mathbf{v}(t)$ и закон его движения $\mathbf{r}(t)$ в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ v_y = -gt; \end{cases} \quad (1.42)$$

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = H - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (1.43)$$

Уравнение траектории находится из закона движения тела в координатной форме (1.43) путем исключения времени t :

$$y(x) = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (1.44)$$

Остальные искомые величины определяются в соответствии с формулами, приведенными в п. 1 данной Главы.

Модуль скорости (1.8) равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}. \quad (1.45)$$

Модуль ускорения (1.14) имеет вид:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g. \quad (1.46)$$

Проекции ускорения на направление скорости и перпендикулярное ему направление (1.19, 1.23) равны:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}. \quad (1.47)$$

Радиус кривизны (1.21) определяется соотношением:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{v_0 g}. \quad (1.48)$$

Заметим, что в данной задаче все формулы для нахождения искомых величин справедливы с начального момента времени $t_0 = 0$ до момента падения тела на Землю $t_0 \leq t \leq t_{\text{пад}}$. Этот момент времени легко найти из закона движения (1.43), приняв координату y равной нулю:

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1.49)$$

Задача 1.3

(Кинематика материальной точки и принцип суперпозиции движений)

Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью v_d , перпендикулярной направлению течения реки. Модуль скорости течения реки, ширина которой d , нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону, изменяясь от 0 до u_m . Найти уравнение траектории лодки, время ее движения τ , а также снос лодки l вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

Решение

I. Выберем декартову систему координат, жестко связанную с берегом реки, и с началом в месте отплытия лодки. Оси системы координат и скорость течения реки $u(y)$ изображены на рис. 1.7.

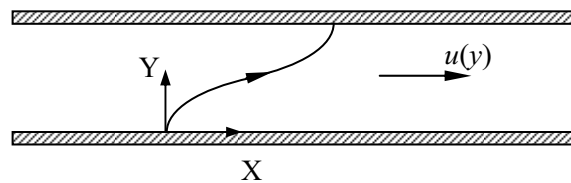


Рис. 1.7

При решении задачи лодку будем считать материальной точкой, а берега реки параллельными.

II. Запишем начальные условия для лодки в соответствии с условиями задачи:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0, \\ v_x(0) = 0, v_y(0) = v_{\text{л}}, \end{cases} \quad (1.50)$$

где v_x , v_y – проекции скорости лодки на оси выбранной системы координат.

В соответствии с принципом суперпозиции движений (1.26) в любой момент времени $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(y(t)) + \mathbf{v}_{\text{л}}(t)$ или в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = u(y), \\ v_y = v_{\text{л}}. \end{cases} \quad (1.51)$$

По условию задачи модуль скорости течения реки, ширина которой d , нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону, поэтому можно записать:

$$u(y) = a(y - d/2)^2 + b, \quad (1.52)$$

где a и b – постоянные величины. Для определения величины b используем условие задачи:

$$b = u(y = d/2) = u_{\text{м}}. \quad (1.53)$$

Используя начальные условия $v_x(0) = a \frac{d^2}{4} + b = 0$ и соотношение (1.53), получим величину a :

$$a = -\frac{4}{d^2} b = -\frac{4}{d^2} u_{\text{м}}. \quad (1.54)$$

III. Система уравнений (1.51) с учетом (1.52) – (1.54) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = -\frac{4u_{\text{м}}}{d^2} y^2 + \frac{4u_{\text{м}}}{d} y, \\ \frac{dy}{dt} = v_y = v_{\text{л}}. \end{cases} \quad (1.55)$$

Интегрируя уравнения (1.55) с учетом начальных условий для координат лодки (1.50), находим закон движения:

$$x(t) = -\frac{4u_{\text{м}}}{d^2} v_{\text{л}}^2 \frac{t^3}{3} + \frac{2u_{\text{м}}}{d} v_{\text{л}} t^2, \quad (1.56)$$

$$y(t) = v_d t. \quad (1.57)$$

Уравнение траектории получаем, исключая время t из закона движения в координатной форме (1.56) и (1.57):

$$x(y) = \frac{4u_m}{3v_d d^2} \left(-y^3 + \frac{3}{2} y^2 d \right). \quad (1.58)$$

Поскольку в момент причаливания $y(\tau) = d$, время движения τ лодки равно:

$$\tau = \frac{d}{v_d}. \quad (1.59)$$

Следовательно, для искомого сноса лодки l получим (см. 1.58):

$$l = x(\tau) = \frac{2u_m}{3v_d} d. \quad (1.60)$$

Задача 1.4

(Принцип суперпозиции движений)

Определить форму траектории капль дождя на боковом стекле трамвая, движущегося горизонтально со скоростью v_1 , во время его торможения с ускорением a . Капли дождя падают на землю вертикально вниз, и скорость их относительно земли постоянна и равна v_2 .

Решение

I. Нарисуем чертеж и изобразим на нем заданные в условии задачи кинематические характеристики капли дождя и трамвая в момент начала торможения трамвая (рис. 1.8).

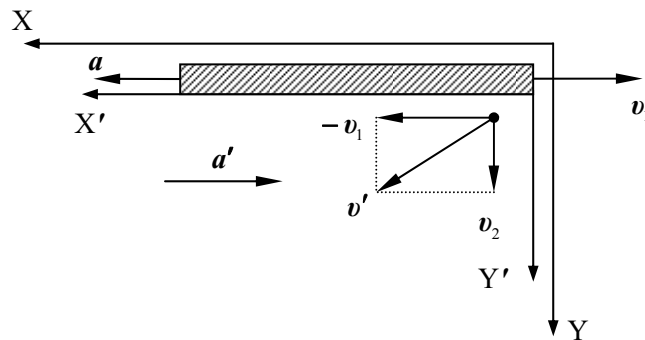


Рис. 1.8

Выберем систему координат XU , связанную с Землей, так, чтобы ось X была направлена горизонтально вдоль ускорения трамвая, а ось Y – вертикально вниз. Выберем также вторую систему координат $X'Y'$, связанную со стеклом трамвая, так, чтобы ее оси X' и Y' были сонаправлены с осями X и Y . Время в обеих системах отсчитываем от момента начала торможения трамвая.

Будем считать, что капля дождя является материальной точкой, положение которой в момент начала торможения трамвая совпадает с началом координат системы $X'Y'$.

II. Используя принцип суперпозиции движений (1.26), запишем скорость v' и ускорение a' капли дождя относительно стекла трамвая (системы координат $X'Y'$):

$$v' = v_2 - v_1, \quad (1.61)$$

$$a' = -a. \quad (1.62)$$

В соответствии с выбранной системой отсчета запишем начальные условия для капли дождя:

$$x'(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad (1.63)$$

$$v'_x(0) = v_1, \quad v'_y(0) = v_2. \quad (1.64)$$

III. Записанные дифференциальные уравнения (1.61) и (1.62) с учетом начальных условий (1.63) и (1.64) позволяют найти закон движения капли в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x' = v_1 t - \frac{at^2}{2}, \\ y' = v_2 t. \end{cases} \quad (1.65)$$

Уравнение траектории находится из закона движения капли путем исключения из (1.65) времени t :

$$x' = v_1 \frac{y'}{v_2} - a \frac{y'^2}{2v_2^2}. \quad (1.66)$$

Как видим, траектория в системе координат $X'Y'$, связанной со стеклом трамвая, является параболой (см. рис. 1.9) с вершиной в точке с координатами:

$$x' = \frac{v_1^2}{2a}, \quad y' = \frac{v_1 v_2}{a}. \quad (1.67)$$

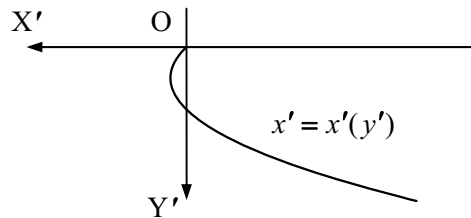


Рис. 1.9

Задача 1.5

(Уравнения кинематической связи)

Концы твердого стержня MN могут свободно скользить по сторонам прямого угла MON (см. рис. 1.10). Найти уравнение траектории точки P стержня, которая делит его на части длиной a и b .

Решение

I. Выберем и изобразим декартову систему координат, оси которой совпадают со сторонами угла MON (см. рис. 1.10).

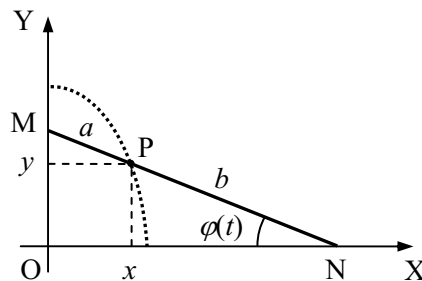


Рис. 1.10

В соответствии с условием задачи будем считать стержень абсолютно твердым. Следовательно, его положение в любой момент времени t однозначно задается углом $\varphi(t)$ между осью OX и стержнем MN.

II. Запишем закон движения точки P стержня в координатной форме (см. рис. 1.10):

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \varphi(t), \\ y(t) = b \sin \varphi(t). \end{cases} \quad (1.68)$$

Искомое уравнение траектории точки Р можно получить, исключив время из закона движения (1.68).

III. Преобразуя уравнения (1.68), получаем:

$$\cos^2 \varphi(t) + \sin^2 \varphi(t) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (1.69)$$

Следовательно, искомое уравнение траектории принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.70)$$

Уравнение (1.70) является уравнением эллипса с полуосями, совпадающими по направлению с осями выбранной системы координат и равными a и b . В случае, когда $a = b$, эллипс вырождается в окружность.

Задача 1.6

(Уравнения кинематической связи)

На клине с углом при основании α , расположенном на горизонтальной поверхности, находится система двух тел 1 и 2 (см. рис. 1.11), связанных нерастяжимой нитью, перевешенной через маленький блок, ось которого закреплена в верхней точке клина. Записать уравнение кинематической связи для ускорений клина и двух тел, если тело 2 не отрывается от вертикальной поверхности клина в процессе движения.

Решение

I. Выберем систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Ось X декартовой системы координат направим горизонтально, а ось Y вертикально вверх (см. рис. 1.11).

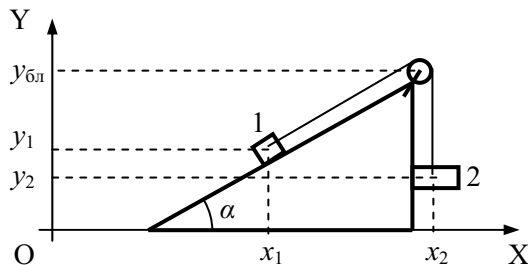


Рис. 1.11

Будем считать тела 1 и 2 материальными точками, связанными нерастяжимой нитью, а клин – абсолютно твердым телом, которое может двигаться поступательно вдоль оси X . Обозначим координаты первого и второго тел в системе координат XY – (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , соответственно. Линейные размеры блока по условию задачи малы по сравнению с длиной нити, поэтому не будем учитывать их при записи уравнений кинематической связи для координат тел системы.

II. Выразим длину нити l через вертикальные координаты различных точек рассматриваемой системы тел:

$$l = \frac{y_{\text{бл}} - y_1}{\sin \alpha} + y_{\text{бл}} - y_2, \quad (1.71)$$

где $y_{\text{бл}}$ – координата блока, не изменяющаяся в процессе движения.

Если длину наклонного участка нити выразить через горизонтальные координаты тел системы, то выражение для длины нити принимает вид:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha} + y_{\text{бл}} - y_2. \quad (1.72)$$

III. Дифференцируя (1.71) и (1.72) дважды по времени и учитывая, что $l = \text{const}$ и $y_{\text{бл}} = \text{const}$, получаем искомые уравнения кинематической связи для ускорений тел рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} a_{y1} - a_{y2} \sin \alpha = 0, \\ a_{x2} - a_{x1} - a_{y2} \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (1.73)$$

Задача 1.7

(Уравнения кинематической связи)

Система тел состоит из двух блоков и двух подвешенных к ним тел (см. рис. 1.12). Один из блоков составлен из двух коаксиальных цилиндров с неподвижной относительно потолка осью, имеющих различные радиусы r и R . Первое тело подвешено на нити, намотанной на цилиндр радиуса r , второй – на нити, прикрепленной к оси другого блока. Найти ускорение второго тела, если известно, что ускорение первого тела равно a_1 . Нити считать нерастяжимыми.

Решение

I. Выберем систему отсчета, жестко связанную с потолком. Направление осей декартовой системы координат, связанной с телом отсчета, показано на рис. 1.12.

Считаем тела 1 и 2 материальными точками, нити – нерастяжимыми. Проскальзывания нитей относительно блоков нет.

II. Пусть за малый интервал времени Δt изменение координаты первого тела равно Δx_1 (для определенности будем считать, что оно опускается). Поскольку нить нерастяжима, то угол поворота $\Delta\varphi$ цилиндра радиусом r связан с величиной Δx_1 следующим соотношением:

$$\Delta x_1 = r\Delta\varphi. \quad (1.74)$$

При этом второй цилиндр радиусом R повернется на тот же угол $\Delta\varphi$, а длина нити, на которой лежит блок с подвешенным к нему телом 2, изменится на величину:

$$\Delta l = -R\Delta\varphi. \quad (1.75)$$

Изменение координаты центра второго блока, а значит и второго тела, равно:

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta l}{2}. \quad (1.76)$$

III. Решая систему уравнений (1.74) – (1.76), получим уравнение, связывающее изменения координат двух тел:

$$\Delta x_2 = -\frac{R}{r} \cdot \frac{\Delta x_1}{2}. \quad (1.77)$$

Поделив левую и правую части (1.77) на малый интервал времени, получим уравнение кинематической связи для скоростей тел:

$$v_2 = -v_1 \frac{R}{2r}. \quad (1.78)$$

Дифференцируя полученное соотношение по времени, получаем искомую связь между ускорениями тел:

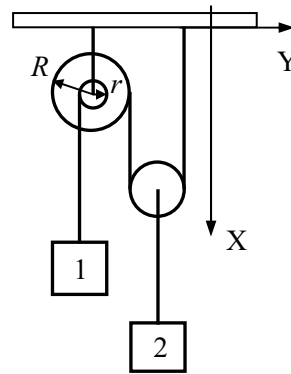


Рис. 1.12

$$a_2 = -a_1 \frac{R}{2r}. \quad (1.79)$$

Задача 1.8

(Кинематика простейших механических систем)

На вал радиуса R , закрепленный на оси, намотана веревка, на конце которой висит груз, опускающийся вниз (см. рис. 1.13). Закон движения груза: $x = x_0 + bt^2$, где x_0 и b – постоянные положительные величины. Определить угловые скорость ω и ускорение β произвольной точки обода вала, модуль ускорения a , его нормальную a_n и тангенциальную a_τ проекции. Записать закон движения этой точки.

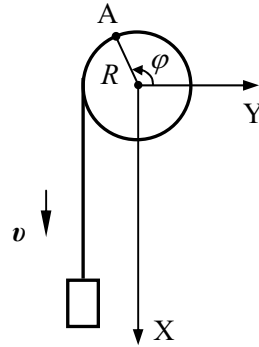


Рис. 1.13

Решение

I. Нарисуем чертеж и изобразим на нем направление скорости v движения груза. В соответствии с условием задачи направим ось X декартовой системы координат вертикально вниз (рис. 1.13). Для определения ускорения и закона движения произвольной точки A на обода вала выберем полярную систему координат с полярной осью Y , в которой угол φ однозначно определяет положение рассматриваемой точки A . Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, веревку считаем нерастяжимой и что проскальзывания веревки относительно вала нет.

II. Запишем заданный в задаче закон движения груза в декартовой системе координат:

$$x = x_0 + bt^2. \quad (1.80)$$

Поскольку веревка нерастяжима, уравнение кинематической связи имеет вид:

$$v_x = R \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.81)$$

Для решения задачи записанные уравнения необходимо дополнить определениями (1.24) и выражениями (1.25) для интересующих нас величин, приведенными в п. 1.1.

III. Найдем законы изменения скорости груза и его ускорения в проекциях на оси декартовой системы координат, используя определения (1.6) и (1.12):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2bt, \quad v_y = 0; \quad (1.82)$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = 2b, \quad a_y = 0. \quad (1.83)$$

Точки обода вала совершают неравномерное движение по окружности, причем модуль их скорости (поскольку нить нерастяжима и не проскальзывает по поверхности обода) в каждый момент времени равен модулю скорости груза, поэтому, используя (1.22) для угловой скорости ω и углового ускорения β , получаем:

$$\omega = \frac{v_x}{R} = \frac{2bt}{R}, \quad (1.84)$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2b}{R}. \quad (1.85)$$

Поскольку проекция ускорения груза на ось X равна тангенциальной проекции ускорения точек обода, то:

$$a_\tau = 2b. \quad (1.86)$$

Нормальную проекцию ускорения определим, используя (1.22):

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4b^2 t^2}{R}. \quad (1.87)$$

Модуль полного ускорения произвольной точки A на ободе колеса найдем из соотношения (1.20):

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 2b \sqrt{\frac{4b^2 t^4}{R^2} + 1}. \quad (1.88)$$

Закон движения произвольной точки A на ободе вала запишем в полярной системе координат:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\beta t^2}{2} = \varphi_0 + \frac{bt^2}{R}, \quad (1.89)$$

где φ_0 – начальное значение угловой координаты точки A в выбранной полярной системе координат.

Задача 1.9

(На кинематику материальной точки)

Закон движения движущейся в плоскости материальной точки, заданный в полярной системе координат, имеет следующий вид: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Определить законы изменения проекций скорости и ускорения материальной точки на направления, задаваемые ортами декартовой и полярной систем координат, жестко связанных с телом отсчета. Начало декартовой системы координат совпадает с полюсом полярной системы, а ось X декартовой системы направлена вдоль полярной оси (см. рис. 1.14).

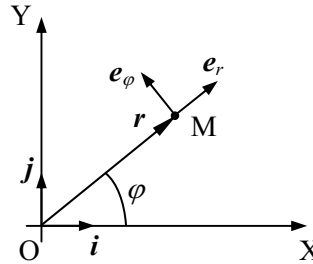


Рис. 1.14

Решение

I. Выберем ось Y декартовой системы координат так, чтобы плоскость XY совпадала с плоскостью, в которой движется материальная точка M (рис. 1.14). Для решения задачи используем две системы координат – декартову систему координат XOY с ортами i и j , и полярную, орты которой e_r и e_φ изображены на рис. 1.14. Заметим, что при движении материальной точки происходит изменение ориентации ортов полярной системы e_r и e_φ , в то время как орты декартовой системы координат i и j не изменяют своего направления.

II, III. Закон движения материальной точки, заданный в полярной системе, запишем в декартовой системе координат XOY :

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \varphi(t), \\ y(t) &= r(t) \sin \varphi(t). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Дифференцируя закон движения (1.90) по времени, получаем искомые законы изменения проекций скорости материальной точки и ее ускорения в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_y &= \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi; \end{aligned} \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} a_x = \dot{v}_x &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi, \\ a_y = \dot{v}_y &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.92)$$

В формулах (1.92), (1.92) и далее для краткости опустим запись зависимости кинематических величин от времени.

Проекции скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат находим двумя способами.

1 способ. Скорость и ускорение материальной точки в полярной системе координат записываются в виде:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.93)$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.94)$$

Следовательно, проекции скорости и ускорения материальной точки на направления, задаваемые ортами рассматриваемых систем координат, связаны соотношениями:

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = v_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{i} = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad (1.95)$$

$$v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = v_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{j} = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi;$$

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{i} = a_r \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \quad (1.96)$$

$$a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{j} = a_r \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi.$$

Сравнивая соотношения (1.90) и (1.95), а также (1.91) и (1.96), получим искомые проекции скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат:

$$v_r = \dot{r}, \quad (1.97)$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi};$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad (1.98)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

2 способ. Запишем радиус-вектор материальной точки в полярной системе координат:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r. \quad (1.99)$$

Поскольку при движении материальной точки происходит изменение ориентации ортов полярной системы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$, найдем скорость их изменения (см. рис. 1.15):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (1.100)$$

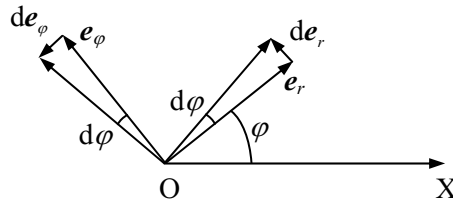


Рис. 1.15

Теперь для нахождения скорости и ускорения точки в той же системе координат необходимо продифференцировать радиус-вектор (1.99) по времени с учетом (1.100):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi, \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + r\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\mathbf{e}}_\phi = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \quad (1.102)$$

В соответствии с (1.101) и (1.102) искомые проекции скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат равны:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\phi &= r\dot{\phi}; \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Как видим, оба способа решения дают одинаковый результат.

Задача 1.10

(На кинематику материальной точки)

Движение материальной точки в полярной системе координат задается взаимосвязью полярных координат $r(\phi) = 2a(1 + \cos \phi)$, при этом полярный угол возрастает линейно во времени $\phi(t) = bt$. Определить зависимость модуля скорости и модуля ускорения материальной точки от времени.

Решение

I. Решаем задачу в заданной полярной системе координат. Заметим, что материальная точка М движется по замкнутой траек-

тории, периодически, с периодом $\frac{2\pi}{b}$, возвращаясь в ту же точку пространства (см. рис. 1.16).

II. Определим закон изменения проекций скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат, воспользовавшись формулами (1.103) и (1.104), полученными в предыдущей задаче:

$$v_r = \dot{r} = -2a \sin \varphi \dot{\varphi} = -2ab \sin \varphi, \quad (1.105)$$

$$v_\varphi = r \dot{\varphi} = 2a(1 + \cos \varphi)b;$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -2ab^2(2 \cos \varphi + 1), \quad (1.106)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -4ab^2 \sin \varphi.$$

Тогда искомые модули скорости и ускорения материальной точки равны:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 2ab\sqrt{2 + 2 \cos(bt)}, \quad (1.107)$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = 2ab^2\sqrt{5 + 4 \cos(bt)}. \quad (1.108)$$

Заметим, что материальная точка в моменты времени $t_k = (2k+1)\frac{\pi}{b}$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$) находится в начале (полюсе) полярной системы координат, имеет нулевую скорость, а ускорение, по модулю равное $a(t_k) = 2ab^2$, направлено противоположно полярной оси.

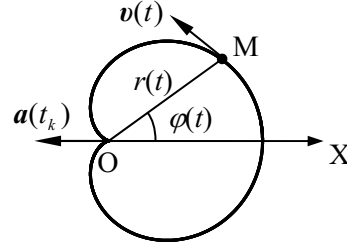


Рис. 1.16

Задача 1.11

(На кинематику материальной точки)

Планета движется вокруг Солнца в соответствии с законами Кеплера по эллиптической траектории $r(1 - e \cos \varphi) = p$. Параметр эллипса p , эксцентриситет e и секторную скорость σ считать заданными. Определить проекции ускорения планеты в зависимости от координат r и φ полярной системы.

Решение

I. При решении задачи будем считать планету и Солнце материальными точками. Согласно первому закону Кеплера все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов эллипса O (см. рис. 1.17).

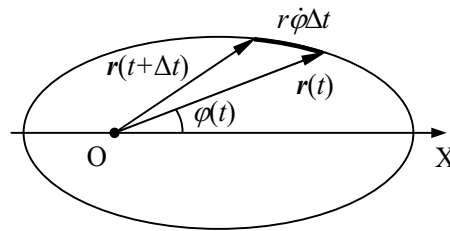


Рис. 1.17

В соответствии с условием задачи введем полярную систему координат в плоскости движения планеты, полюс которой совпадает с Солнцем, а полярная ось совпадает с одной из осей эллипса.

Согласно второму закону Кеплера секторная скорость σ планеты, равная скорости изменения площади, описываемой радиус-вектором материальной точки, представляющим планету, постоянна при движении планеты вокруг Солнца.

II. Для нахождения проекций ускорения планеты в полярной системе координат воспользуемся формулами (1.104):

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Поскольку в уравнения (1.109) входят производные полярных координат по времени, дополним эту систему уравнением траектории планеты и выражением для ее секторной скорости σ :

$$r(1 - e \cos \varphi) = p, \quad (1.110)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (1.111)$$

III. В соответствии с условием задачи секторная скорость σ постоянна при движении планеты по эллиптической траектории, поэтому ее производная по времени равна нулю:

$$\dot{\sigma} = r\dot{\phi} + \frac{1}{2}r^2\ddot{\phi} = 0. \quad (1.112)$$

Сравнивая (1.112) с выражением (1.109) для проекции ускорения a_ϕ , видим, что $a_\phi = 0$. Следовательно, ускорение в любой момент времени имеет только проекцию a_r , которая в соответствии с (1.109) является функцией производных полярных координат по времени.

Продифференцируем обе части уравнения траектории (1.110) по времени:

$$\dot{r}(1 - e \cos \varphi) + r e \sin \varphi \dot{\varphi} = 0. \quad (1.113)$$

Используя уравнение траектории (1.110) и выражение для секторной скорости (1.111), преобразуем (1.113) к виду:

$$\dot{r}p + 2\sigma e \sin \varphi = 0. \quad (1.114)$$

Продифференцируем теперь обе части уравнения (1.114) по времени

$$\ddot{r}p + 2\sigma e \cos \varphi \dot{\varphi} = 0. \quad (1.115)$$

Опять воспользуемся уравнением траектории (1.110) и выражением для секторной скорости (1.111) для исключения $\cos \varphi$ и $\dot{\varphi}$ из (1.115):

$$\ddot{r}p + 2\sigma e \frac{r-p}{er} \cdot \frac{2\sigma}{r^2} = \ddot{r}p + 4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3} = 0. \quad (1.116)$$

В результате находим:

$$\ddot{r} = -4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3 p}. \quad (1.117)$$

Для нахождения искомой проекции ускорения планеты a_r , как функции только координат полярной системы, подставим $\ddot{r}$ (1.116) и $\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r^2}$ (см. (1.111)) в выражение (1.109):

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3 p} - r \frac{4\sigma^2}{r^4} = -\frac{4\sigma^2}{r^2 p}. \quad (1.118)$$

Таким образом, ускорение планеты, движущейся по эллиптической траектории, направлено к Солнцу, не зависит от полярного угла φ и обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца:

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2 p}, \quad (1.119)$$

$$a_\varphi = 0.$$

Задача 1.12

(На кинематику материальной точки)

Небольшое тело движется по гладкой внутренней поверхности полого вертикального цилиндра радиуса R . В начальный момент времени скорость тела направлена перпендикулярно оси цилиндра и равна v_0 . Определить законы изменения скорости и ускорения материальной точки в цилиндрической системе координат, а также угол $\alpha(t)$ между скоростью и ускорением.

Решение

I. Будем считать тело материальной точкой, которая движется по цилиндрической поверхности с постоянной вертикальной составляющей ускорения, равной ускорению свободного падения g . Для решения задачи выберем цилиндрическую систему координат, ось Z которой совпадает с осью цилиндра, как показано на рис. 1.18. На том же рисунке изображены орты e_r , e_φ и e_z цилиндрической системы. Ось, от которой отсчитывается угол φ системы координат, направим на положение тела в начальный момент времени.

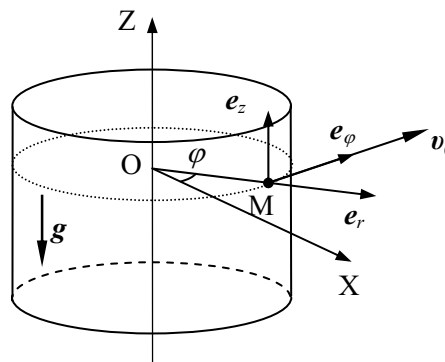


Рис. 1.18

II. В соответствии с условиями задачи и выбранной системой координат запишем начальные значения проекций скорости для рассматриваемого тела:

$$v_r(0) = 0, \quad v_\varphi(0) = v_0, \quad v_z(0) = 0. \quad (1.120)$$

Воспользуемся формулами (1.103) и (1.104) для проекций скорости и ускорения тела на направления, задаваемые оортами цилиндрической системы:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (1.121)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (1.122)$$

Кроме того, в соответствии с условиями задачи, запишем:

$$r(t) = R, \quad a_\varphi(t) = 0, \quad a_z(t) = -g. \quad (1.123)$$

III. Используя (1.121) – (1.123), получим законы изменения проекций скорости и ускорения:

$$v_r(t) = 0, \quad v_\varphi(t) = v_0, \quad v_z(t) = -gt; \quad (1.124)$$

$$a_r(t) = -\frac{v_0^2}{R}, \quad a_\varphi(t) = 0, \quad a_z(t) = -g. \quad (1.125)$$

Таким образом, искомый закон изменения скорости и ускорения в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_\varphi - gt \mathbf{e}_z, \quad (1.126)$$

$$\mathbf{a} = -\frac{v_0^2}{R} \mathbf{e}_r - g \mathbf{e}_z. \quad (1.127)$$

Определим также искомый угол α между скоростью и ускорением тела:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{va} = \frac{g^2 t}{\sqrt{(v_0^2 + (gt)^2) \left(\left(\frac{v_0^2}{R} \right)^2 + g^2 \right)}}. \quad (1.128)$$

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Из пушки, находящейся на самолете, летящем горизонтально со скоростью $v_{\text{сам}}$, выпущен снаряд в направлении движения само-

лета. Скорость снаряда относительно самолета равна $v_{\text{сн}}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

- 1) уравнение траектории снаряда относительно Земли $y(x)$;
- 2) уравнение траектории снаряда относительно самолета $y'(x')$;
- 3) уравнение траектории самолета относительно снаряда $y''(x'')$.

Ответ: 1) $y = -\frac{g}{2(v_{\text{сам}} + v_{\text{сн}})^2} x^2$, 2) $y' = -\frac{g}{2v_{\text{сн}}^2} (x')^2$,

3) $y'' = \frac{g}{2v_{\text{сн}}^2} (x'')^2$, $x'' < 0$. Оси X , X' и X'' декартовой системы координат

направлены горизонтально вдоль скорости самолета, а оси Y , Y' и Y'' – вертикально вверх, при этом начало координат системы XY совпадает с положением самолета в момент выстрела пушки.

Задача 2

Лодка пересекает реку шириной d с постоянной относительно воды скоростью v , перпендикулярной скорости течения реки, модуль которой нарастает от берегов к середине реки по линейному закону, меняясь от 0 до u . Найти траекторию лодки, а также снос лодки l вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

Ответ: $y = \sqrt{\frac{vd}{u}} x$, при $y < d/2$; $y = d - \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{vd}{u}} x$, при $y > d/2$;

$l = \frac{ud}{2v}$. Ось X декартовой системы координат XY направлена вдоль берега реки, а ось Y – поперек реки. Начало системы координат, жестко связанной с берегом реки, совпадает с местом отплытия лодки.

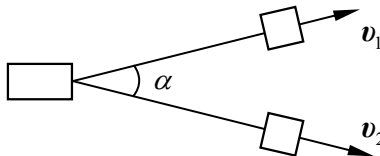
Задача 3

По движущемуся вниз эскалатору спускается пассажир со скоростью v относительно эскалатора. Скорость эскалатора равна u . Спускаясь по неподвижному эскалатору пассажир проходит N ступеней. Сколько ступеней N' пройдет пассажир, спускаясь по движущемуся эскалатору?

Ответ: $N' = \frac{v}{v+u} N$.

Задача 4

Два трактора, движущиеся со скоростями v_1 и v_2 , буксируют с помощью тросов автомобиль (см. рис.).



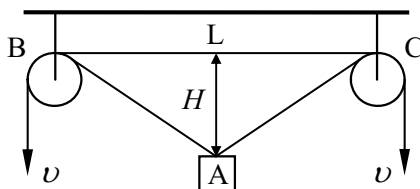
Определить модуль и направление скорости v автомобиля в тот момент, когда тросы параллельны векторам v_1 и v_2 , а угол между ними равен α .

Ответ: $v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}}{\sin \alpha}$,

$$\beta_1 = \arccos \left(\frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}} \right), \text{ где } \beta_1 - \text{угол между векторами } v \text{ и } v_1.$$

Задача 5

Тело А подвешено на нитях, перекинутых через блоки В и С малого диаметра так, что $AB = BC$ (см. рис.).



Концы нитей тянут с одинаковыми скоростями v . Расстояние между блоками В и С равно L . Найти модуль скорости v_A тела

А в тот момент, когда оно находится на расстоянии H от прямой ВС.

Ответ: $v_A = v \sqrt{1 + \left(\frac{L}{2H}\right)^2}$.

Задача 6

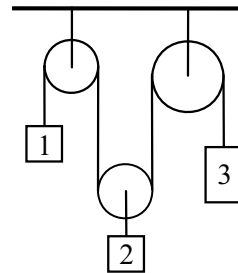
Лодку подтягивают к пристани высотой H с помощью веревки, наматываемой на вал лебедки. Радиус вала равен $R \ll H$. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . Определить зависимость модулей скорости и ускорения лодки от длины веревки $L > H$. Движение лодки считается поступательным.

Ответ: $v = \frac{\omega RL}{\sqrt{L^2 - H^2}}$, $a = \frac{(\omega r H)^2}{(L^2 - H^2)^{3/2}}$.

Задача 7.

Найти уравнение кинематической связи для ускорений тел, подвешенных на нерастяжимых нитях (см. рис.).

Ответ: $a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$, где a_1 , a_2 и a_3 – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.



Задача 8

Определить закон изменения модуля скорости материальной точки, движущейся в плоскости, если ее движение описывается в полярной системе координат следующим законом: $r(t) = a(1 - bt)$,

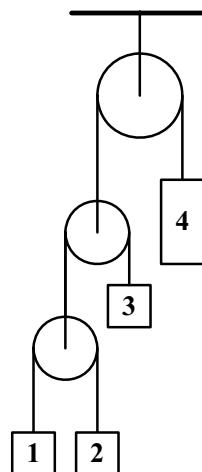
$\varphi(t) = \frac{bt}{1 - bt}$, где a и b – положительные постоянные величины.

Ответ: $v = ab \sqrt{1 + \frac{1}{(1 - bt)^2}}$, при $t < \frac{1}{b}$.

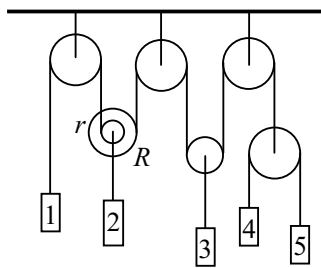
Задача 9

Четыре тела подвешены на нерастяжимых нитях (см. рис.). Найти ускорение тела 4, если известны ускорения остальных трех тел.

Ответ: $a_4 = -(a_1 + a_2 + 2a_3)/4$, где a_1 , a_2 , a_3 и a_4 – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.

**Задача 10**

Найти уравнение кинематической связи для ускорений тел, подвешенных на нерастяжимых нитях так, как показано на рисунке.



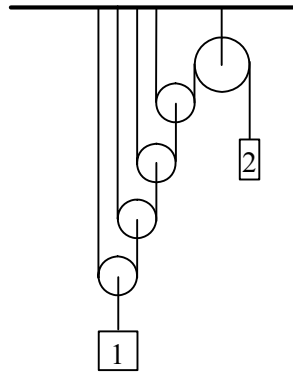
Ответ: $a_1 + \frac{R+r}{R}a_2 + \frac{r}{R}\left(2a_3 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5\right) = 0$,

где a_1 , a_2 , a_3 , a_4 и a_5 – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.

Задача 11

Два тела подвешены на нерастяжимых нитях, как показано на рисунке. Определить ускорение тела 2, если известно ускорение тела 1.

Ответ: $a_2 = -16a_1$, где a_1 и a_2 – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.



ГЛАВА 2 ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

2.1. Теоретический материал

2.1.1. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка (на которую не действуют силы) движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы отсчета называются **инерциальными**.

Второй закон Ньютона. В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно сумме всех сил, действующих на эту материальную точку со стороны других тел:

$$ma = \sum_i F_i. \quad (2.1)$$

Третий закон Ньютона. Силы взаимодействия двух материальных точек:

- 1) парные и приложены к разным материальным точкам,
- 2) одной природы,
- 3) равны по модулю,
- 4) противоположны по направлению,
- 5) направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки.

Уравнение движения – второй закон Ньютона, записанный в векторной форме или в проекциях на оси инерциальной системы отсчета:

$$ma = \sum_i F_i \text{ или } \begin{cases} ma_x = \sum_i F_{ix}, \\ ma_y = \sum_i F_{iy}, \\ ma_z = \sum_i F_{iz}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Заметим, что уравнение движения можно записать в проекциях на любую, в том числе и произвольно движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, ось. Для этого достаточно

умножить скалярно левую и правую части векторного уравнения движения (2) на единичный вектор (орт), задающий направление этой оси. Например, на направление скорости $\boldsymbol{\tau}$ и на направление, перпендикулярное скорости $\boldsymbol{n}$:

$$\begin{aligned} ma_n &= \sum_i F_{in}, \\ ma_\tau &= \sum_i F_{i\tau}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\boldsymbol{a}_n(t) = a_n(t)\boldsymbol{n}(t)$ и $\boldsymbol{a}_\tau(t) = a_\tau(t)\boldsymbol{\tau}(t)$ – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения материальной точки.

Законы динамики – это законы Ньютона и законы, описывающие индивидуальные свойства сил.

2.1.2. Законы, описывающие индивидуальные свойства сил

А. Гравитационные силы

Закон всемирного тяготения. Материальные точки притягиваются друг к другу с силами $\boldsymbol{F}_{21}$ и $\boldsymbol{F}_{12}$ (см. рис. 2.1), модули которых пропорциональны произведению их масс и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними:

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \boldsymbol{r}_{12}. \quad (2.4)$$

Здесь $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная, $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

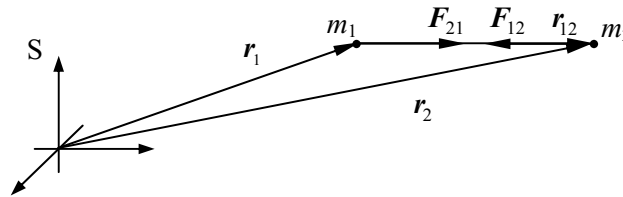


Рис. 2.1. Ориентация сил гравитационного взаимодействия двух материальных точек

Силы гравитационного взаимодействия сферически симметричных тел, как нетрудно показать, определяются выражением

(2.4), в котором r_{12} – радиус-вектор центра второго тела относительно центра первого тела.

Сила тяжести, действующая на материальную точку, – сумма силы гравитационного притяжения Земли (или любого другого космического объекта) и центробежной силы инерции (см. Главу 4), действующей на материальную точку в системе отсчета, связанной с Землей.

Сила тяжести, действующая на тело, – сумма сил тяжести, действующих на материальные точки этого тела.

В однородном поле силы тяжести вблизи поверхности Земли сила тяжести F_T равна произведению массы тела m на ускорение центра масс тела при свободном падении (**ускорение свободного падения**) g относительно Земли: $F_T = mg$.

Вес тела – сила, с которой тело, находящееся в поле сил тяжести, действует на неподвижную относительно него опору или подвес, препятствующие свободному падению тела.

Б. Упругие силы

Если после прекращения внешнего воздействия деформированное тело восстанавливает свою форму и размеры, то деформация называется упругой.

Закон Гука. При малых упругих деформациях величина деформации пропорциональна величине вызывающей ее силы.

В частности, при деформации растяжения (сжатия) упругого стержня (пружины, резинового шнура) деформация стержня пропорциональна величине вызывающей ее силы, действующей вдоль стержня:

$$\Delta l = \frac{1}{k} F. \quad (2.5)$$

Здесь k – **коэффициент жесткости (упругости)** стержня, $\Delta l = l - l_0$ – удлинение стержня, l и l_0 – длина стержня в деформированном и недеформированном состояниях (см. рис. 2.2).

Если сила, действующая на стержень, направлена противоположно указанному на рис. 2 направлению, то упругий стержень испытывает сжатие. При этом $\Delta l < 0$ и F в формуле (2.5) следует считать проекцией силы F на ось X системы координат, изображенной на рис. 2.2.

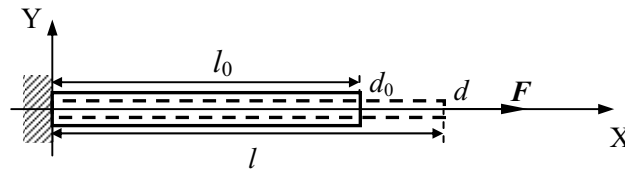


Рис. 2.2. Удлинение стержня под действием продольной силы

При деформации растяжения (сжатия) однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением относительное удлинение стержня ε пропорционально нормальному напряжению σ :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma. \quad (2.6)$$

Здесь E – **модуль Юнга** материала, из которого сделан стержень,

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – относительное удлинение стержня, $\sigma = \frac{F}{S}$ – **нормальное**

напряжение, S – площадь поперечного сечения стержня.

Заметим, что для однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением коэффициент жесткости (упругости) этого стержня связан с модулем Юнга соотношением:

$$k = \frac{S}{L} E. \quad (2.7)$$

В случае растяжения (сжатия) стержня уменьшаются (увеличиваются) его поперечные размеры. При этом отношение относительного поперечного сжатия стержня к его относительному удлинению зависит только от материала стержня и называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Здесь μ – **коэффициент Пуассона**, $\varepsilon_{\perp} = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$ – относитель-

ное изменение поперечных размеров стержня, d и d_0 – поперечный линейный размер стержня в деформированном и недеформированном состояниях (см. рис. 2.2).

При деформации стержня возникают внутренние упругие силы $F_{\text{упр}}$, действующие между его частями, которые стремятся вернуть стержень в недеформированное состояние. Напряжение упругих сил равно

$$\sigma_{\text{упр}} = \frac{F_{\text{упр}}}{S}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим слой стержня с координатами границ x и $x+dx$ вдоль стержня (см. рис. 2.3).

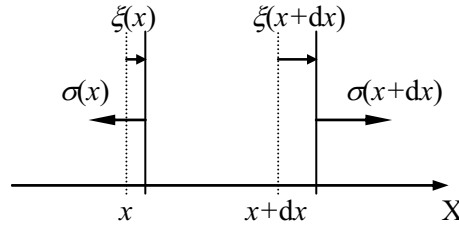


Рис. 2.3. Смещение границ выделенного слоя стержня

В результате действия внутренних упругих сил возникает смещение левой $\xi(x)$ и правой $\xi(x+dx)$ границ выделенного слоя. Тогда **относительная продольная деформация** ε этого слоя равна

$$\varepsilon = \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi'_x. \quad (2.10)$$

Закон Гука в этом случае принимает вид

$$\sigma_{\text{упр}}(x) = E\varepsilon = E\xi'_x. \quad (2.11)$$

В случае деформации слоя изменяются его поперечные размеры. При этом отношение поперечной к продольной деформации определяется коэффициентом Пуассона в соответствии с (2.8).

При ускоренном движении стержня под действием внешней силы, вызывающей его деформацию, возникают неоднородные вдоль стержня напряжения упругих сил. В этом случае возникающие неоднородные деформации по-прежнему определяются выражениями (2.11), (2.8).

В. Силы трения

Сила трения – составляющая силы непосредственного взаимодействия тел при соприкосновении вдоль плоскости соприкосновения.

Сила нормального давления (реакции опоры) – составляющая силы взаимодействия тел при непосредственном соприкосновении вдоль направления нормали к плоскости соприкосновения.

Силы вязкого (внутреннего) трения F_v – силы трения, возникающие при движении тела в вязкой (жидкой или газообразной) среде.

При малой величине скорости v движения тела относительно среды

$$F_v = -\eta v, \quad (2.12)$$

где η – коэффициент вязкого (внутреннего) трения.

Сила вязкого трения покоя равна нулю: $F_{vp} = 0$.

Силы сухого трения F_c – силы трения, возникающие при непосредственном соприкосновении твердых тел.

Силы трения покоя F_{cp} – силы сухого трения, возникающие в отсутствие относительного движения взаимодействующих тел.

Сила трения скольжения F_{ck} – сила сухого трения, возникающая при относительном движении взаимодействующих тел.

Закон Амонтона – Кулона – эмпирический закон, описывающий свойства сил сухого трения:

1) модуль силы сухого трения покоя может принимать значения от нуля до некоторого своего максимального значения: $0 \leq F_{cp} \leq F_{max}$;

2) модуль силы сухого трения скольжения равен максимальному значению модуля силы сухого трения покоя: $F_{ck} = F_{max}$;

3) модуль силы сухого трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления:

$$F_{ck} = \mu N, \quad (2.13)$$

где μ – коэффициент (силы сухого) трения, не зависящий от силы нормального давления, а только от вещества и состояния поверхностей трущихся тел;

4) сила сухого трения скольжения направлена противоположно направлению скорости относительного движения тел $v_{\text{отн}}$:

$$F_{\text{ск}} \uparrow \downarrow v_{\text{отн}}. \quad (2.14)$$

Силовое поле – область пространства, где действуют силы данной природы, в общем случае зависящие как от времени, так и от координаты и скорости движения материальной точки – $F(t, r, v)$.

2.2. Основные типы задач и методы их решения

2.2.1. Классификация задач динамики

Прямая задача динамики – найти закон движения тела или системы тел, если известны силы, действующие на эти тела.

Обратная задача динамики материальной точки – найти действующие на тело или систему тел силы, если известны законы движения этих тел.

Большинство задач содержат в себе элементы как прямой, так и обратной задач динамики. Как правило, одна из этих задач имеет основное, другая – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

2.2.2. Общая схема решения задач динамики с помощью законов Ньютона

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат для всех тел системы.

2. Использовать третий закон Ньютона, если это не было сделано ранее в п. 3.
3. Использовать законы, описывающие индивидуальные свойства сил:
 - а) закон всемирного тяготения,
 - б) закон Гука,
 - в) закон Амонтона – Кулона и т.д.
4. Записать уравнения кинематических связей.
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть предельные и частные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечания.

В случае решения задач на динамику материальной точки в пп. I.3 – II.1 речь идет о характеристиках материальной точки, а п. II.2 надо опустить.

В случае решения задач на динамику простейших механических систем в пп. I.3 – II.2 речь идет о характеристиках и уравнениях движения тел и силах, действующих между телами рассматриваемой системы.

Пункты II.1 – II.4 (в том числе II.3.а – II.3.в) можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от решаемой задачи.

2.3. Примеры решения задач

Задача 2.1

(Машина Атвуда)

Через блок, подвешенный к потолку перекинута нить. К концам нити прикреплены два груза массами m_1 и m_2 . Определить ускорения тел.

Решение

Решение данной задачи (и всех последующих) будем проводить в соответствии с предложенной схемой решения задач динамики.

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 2.4, и изобразим на нем действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы, действующие со стороны нитей.

Выберем модели тел и их движений. Грузы считаем материальными точками, подвешенными на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый абсолютно твердый цилиндрический блок. Будем считать, что грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блока, сопротивления воздуха и трения в оси блока нет.

II. Запишем уравнения движения двух грузов в проекции на ось X (см. рис. 2.4) и уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T_1, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T_2, \\ a_1 + a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь a_1 и a_2 – проекции ускорений грузов на ось X , T_1 и T_2 – модули сил, действующих на грузы со стороны нити.

Докажем постоянство модуля силы натяжения нити вдоль всей ее длины в условиях данной задачи. Для этого выделим мысленно прямолинейный участок нити произвольной длины (см. рис. 2.4) и запишем уравнение его движения в проекции на ось X :

$$m_n a_n = T_n - T_v + m_n g + F_{\text{сопр}}, \quad (2.16)$$

где m_n – масса выделенного участка нити, a_n – проекция его ускорения на ось X , T_n и T_v – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примыкающих к нему участков нити, $F_{\text{сопр}}$ – проекция силы сопротивления воздуха.

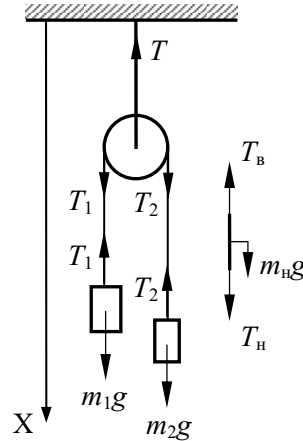


Рис. 2.4

Поскольку нить по условию задачи невесома и нет силы сопротивления воздуха, то из (2.16) следует, что модуль силы натяжения нити постоянен вдоль прямолинейного участка нити, а, следовательно, сила, приложенная к грузу со стороны нити и сила натяжения нити в верхней части прямолинейного участка равны по модулю.

Для доказательства равенства модулей сил натяжения нити слева и справа от блока запишем уравнение вращательного движения (см. (6.30) в Главе 6) блока вместе с примыкающим к нему участком нити (см. рис. 2.4):

$$J \frac{d\omega}{dt} = -T_1 R + T_2 R + M_{\text{тр}} + M_{\text{сопр}}, \quad (2.17)$$

где J – момент инерции блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно оси, проходящей через центр блока и направленной за плоскость чертежа, ω – угловая скорость вращения блока, $M_{\text{тр}}$ – момент сил трения, действующих в оси блока, $M_{\text{сопр}}$ – момент сил сопротивления воздуха, действующих на блок.

Поскольку блок и нить невесома, нет трения в оси блока и силы сопротивления воздуха, то в соответствии с (2.17) модули сил натяжения нити слева и справа от блока равны. Следовательно, равны и силы натяжения нити, приложенные к грузам:

$$T_1 = T_2. \quad (2.18)$$

III. Решим полученную систему уравнений (2.15) и (2.17) относительно искомых физических величин:

$$a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.19)$$

Для оценки правильности полученного результата проанализируем частные и предельные случаи. Если к нити подвешены грузы одинаковой массы, то полученные формулы для проекций ускорений дают значение, равное нулю, что очевидно и из общих соображений. Если $m_1 \gg m_2$, то $a_1 = g$, $a_2 = -g$. При выполнении обратного неравенства $m_1 \ll m_2$, ускорения грузов равны $a_1 = -g$ и $a_2 = g$. Эти предельные значения легко получить из физических соображений. Если один из грузов имеет существенно бóльшую массу, чем второй, то он падает с ускорением свободного падения. Ускорение второго груза в силу нерастяжимости нити равно по величине ускорению первого груза и противоположно по направлению.

Задача 2.2

Найти ускорения тел и силы натяжения нитей для системы тел, изображенной на рисунке.

Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 2.5, и изобразим силы, действующие на тела системы.

Выберем модель, аналогичную той, которая была использована в предыдущей задаче: грузы считаем материальными точками, подвешенными на невесомых и нерастяжимых нитях, перекинутых через невесомые абсолютно твердые цилиндрические блоки. Будем считать, что грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блоков, сопротивления воздуха и трения в оси блоков нет.

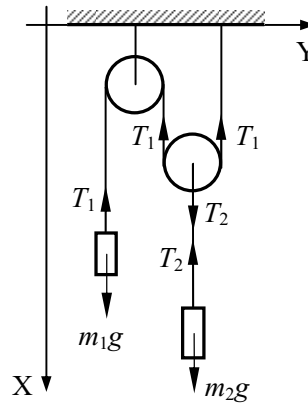


Рис. 2.5

II. Запишем уравнения движения грузов в проекции на ось X выбранной системы координат:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (2.20)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \quad (2.21)$$

Здесь a_1 и a_2 – проекции ускорений грузов на ось X , T_1 и T_2 – модули сил, действующих на грузы со стороны нитей.

Обозначим координаты тел и подвижного блока x_1 , x_2 и $x_{\text{бл}}$ соответственно. Запишем условия нерастяжимости нитей (см. рис. 2.5) в виде:

$$x_1 + 2x_{\text{бл}} = \text{const}, \quad (2.22)$$

$$x_2 - x_{\text{бл}} = \text{const}. \quad (2.23)$$

Дважды дифференцируя (2.22) и (2.23) по времени, получим уравнение кинематической связи для ускорений грузов:

$$a_1 + 2a_2 = 0. \quad (2.24)$$

В рамках принятой модели силы натяжения нити с обеих сторон любого из блоков равны (см. решение задачи 1). Связь между силами натяжения разных нитей найдем из уравнения движения подвижного блока:

$$m_{\text{бл}} a_{\text{бл}} = T_2 - 2T_1, \quad (2.25)$$

где масса подвижного блока $m_{\text{бл}} = 0$.

III. Решая полученную систему уравнений (2.20), (2.21), (2.24) и (2.25), получаем выражения для искомых величин:

$$a_1 = 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}, \quad (2.26)$$

$$a_2 = g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}, \quad (2.27)$$

$$T_1 = m_1(g - a_1) = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}, \quad (2.28)$$

$$T_2 = 2m_1(g - a_1) = \frac{6m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}. \quad (2.29)$$

Рассмотрим частные и предельные случаи решения задачи (2.26) – (2.29).

1. Если $2m_1 = m_2$, то грузы покоятся или движутся равномерно и прямолинейно:

$$a_1 = a_2 = 0.$$

При этом силы натяжения нитей равны:

$$T_2 = 2T_1 = 2m_1 g.$$

2. Если $m_2 \gg m_1$, то тело массой m_2 будет падать с ускорением свободного падения:

$$a_2 = g,$$

а тело массой m_1 подниматься вверх с удвоенным по модулю ускорением:

$$a_1 = -2g.$$

При этом:

$$T_2 = 2T_1 = 6m_1 g.$$

3. Если $m_1 \gg m_2$, то тело массой m_1 будет падать с ускорением свободного падения:

$$a_1 = g,$$

а тело массой m_2 подниматься вверх с ускорением

$$a_2 = -0,5g.$$

При этом:

$$T_2 = 2T_1 = \frac{3}{2}m_1g.$$

Задача 2.3

В системе тел, изображенных на рис. 2.6, известны массы бруска m и клина M , а также угол α при основании клина. Массы блока и нити пренебрежимо малы, нить нерастяжима, трения нет. Найти ускорение клина A .

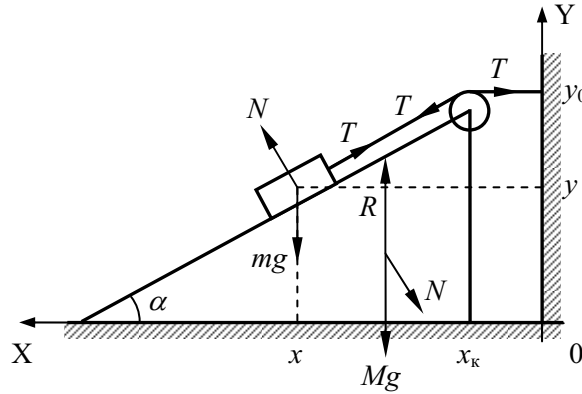


Рис. 2.6

Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 2.6. Изобразим силы, действующие на тела системы: mg и Mg – силы тяжести, действующие на брусок и клин, соответственно; R – сила реакции опоры, действующая на клин; N – сила взаимодействия бруска и клина. При этом учтем, что сила натяжения нити T постоянна вдоль всей ее длины в рамках принятых в условии задачи моделей тел системы, а силы взаимодействия бруска и клина равны по величине в соответствии с третьим законом Ньютона и направлены перпендикулярно поверхности их соприкосновения из-за отсутствия сил трения.

II. Запишем уравнения движения бруска и клина в проекциях на оси выбранной системы координат и учтем при этом, что клин может двигаться только вдоль оси X ($A_y = 0$):

$$ma_x = N \sin \alpha - T \cos \alpha, \quad (2.30)$$

$$ma_y = N \cos \alpha - mg + T \sin \alpha, \quad (2.31)$$

$$MA_x = -N \sin \alpha + T \cos \alpha - T, \quad (2.32)$$

$$0 = R - N \cos \alpha - Mg - T \sin \alpha. \quad (2.33)$$

Дополним систему уравнений (2.30) – (2.33) уравнением кинематической связи, которое следует из условия нерастяжимости нити:

$$x_k + \frac{x - x_k}{\cos \alpha} = \text{const}, \quad (2.34)$$

$$x_k + \frac{y_0 - y}{\sin \alpha} = \text{const}. \quad (2.35)$$

Дифференцируя (2.34) – (2.35) дважды по времени, получим:

$$A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos \alpha} = 0, \quad (2.36)$$

$$A_x - \frac{a_y}{\sin \alpha} = 0. \quad (2.37)$$

III. Преобразуем систему уравнений (2.30) – (2.32), (2.36), (2.37), исключив из них проекции ускорения бруска a_x и a_y . Уравнение (2.33) не требуется для решения поставленной задачи (не требуется нахождения силы реакции опоры, действующей на клин R). В результате получим следующую систему уравнений:

$$mA_x(1 - \cos \alpha) = N \sin \alpha - T \cos \alpha, \quad (2.38)$$

$$mA_x \sin \alpha = N \cos \alpha - mg + T \sin \alpha, \quad (2.39)$$

$$MA_x = -N \sin \alpha + T \cos \alpha - T. \quad (2.40)$$

Решив эту систему уравнений, определим проекцию ускорения клина на ось X:

$$A_x = -g \frac{\sin \alpha}{M/m + 2(1 - \cos \alpha)}. \quad (2.41)$$

Проанализируем полученное выражение для проекции ускорения клина A_x . Если масса клина значительно больше массы бруска ($M \gg m$), то ускорение клина обращается в ноль. Неподвижным при этом остается и брусок. Если угол при основании клина равен нулю, то нет сил, которые могли бы вызвать движение клина – ускорение клина также равно нулю.

Задача 2.4

На доске массой M лежит брусок массой m . Коэффициент трения между доской и бруском равен μ . Доска может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. К бруску прикладывается горизонтальная сила F , модуль которой зависит от времени по закону $F = \alpha t$, где $\alpha = \text{const}$. Определить скорости бруска $u(t)$ и доски $V(t)$ спустя время t после начала действия силы.

Решение

I. Проанализируем характер движения бруска и доски. При малой величине приложенной к бруску горизонтальной силы F доска и брусок будут двигаться с одинаковым ускорением, поскольку сила трения покоя не достигнет еще максимального значения. В некоторый момент времени t_0 сила трения покоя достигнет максимального значения, равного силе трения скольжения, и в дальнейшем будет происходить скольжение бруска по доске, а, следовательно, ускорения тел системы будут изменяться по различным законам. Таким образом, решение задачи разбивается на два этапа: нахождение искомых скоростей бруска и доски при $0 \leq t \leq t_0$ и при $t > t_0$. Необходимо также определить момент времени t_0 , в который начнется скольжение бруска по доске.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 2.7, и изобразим силы, действующие на тела системы.

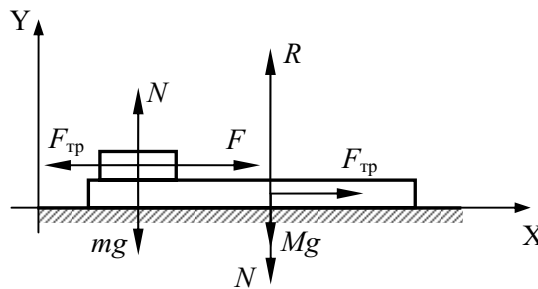


Рис. 2.7

II. Запишем уравнения движения бруска и доски в проекциях на оси системы координат, одинаковые на первом и втором этапах движения, уравнение кинематической связи (при $t \leq t_0$) и закон

Амонта – Кулона (при $t > t_0$). Введем обозначения: a и A – проекции ускорений бруска и доски на ось X .

Брусок не скользит по доске	Брусок скользит по доске
$ma = F - F_{\text{тр}} ,$	(2.42)
$0 = N - mg ,$	(2.43)
$MA = F_{\text{тр}} ,$	(2.44)
$0 = R - N - Mg .$	(2.45)
Используем заданный в условии задачи закон изменения модуля силы F со временем:	
$F = \alpha t .$	
(2.46)	
До тех пор, пока сила трения покоя не достигла своего максимального значения, равного силе трения скольжения, брусок и доска двигаются с одинаковым ускорением:	В этом случае нет кинематической связи между ускорениями бруска и доски. Поскольку брусок скользит по доске для силы трения скольжения можно записать:
$a = A .$	(2.47)
	$F_{\text{тр}} = \mu N .$
	(2.48)

III. Решим полученные системы уравнений для каждого из рассматриваемых этапов движения тел рассматриваемой системы. Уравнение (2.45) не используется при решении поставленной задачи, поскольку не требуется нахождения силы реакции опоры R , действующей на доску.

$a = A = \frac{\alpha t}{M + m} ,$	(2.49)	$a = \frac{\alpha t - \mu mg}{m} ,$	(2.51)
$F_{\text{тр}} = \frac{M \alpha t}{M + m} .$	(2.50)	$A = \frac{\mu mg}{M} ,$	(2.52)
		$F_{\text{тр}} = \mu mg .$	(2.53)

В соответствии с законом Амонта – Кулона максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения (см. (2.13)):

$$\frac{M \alpha t_0}{M + m} = \mu mg . \quad (2.54)$$

Выражение (2.54) позволяет определить момент времени t_0 , в который брусок начинает скользить по доске:

$$t_0 = \frac{\mu mg(M+m)}{M\alpha}. \quad (2.55)$$

Итак:

$$\begin{cases} \text{при } t \leq t_0: & a = A = \frac{\alpha t}{M+m}, \\ \text{при } t > t_0: & a = \frac{\alpha t - \mu mg}{m} \text{ и } A = \frac{\mu mg}{M}. \end{cases} \quad (2.56)$$

Используя полученные выражения для ускорений тел системы, определим теперь законы изменения скоростей этих тел.

При $t \leq t_0$ скорости бруска и доски меняются одинаковым образом и к моменту времени t будут равны:

$$v = V = \int_0^t a \, dt = \int_0^t \frac{\alpha t}{M+m} \, dt = \frac{\alpha t^2}{2(M+m)}. \quad (2.57)$$

При $t > t_0$ скорость бруска будет равна

$$\begin{aligned} v &= \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \int_{t_0}^t \frac{\alpha t - \mu mg}{m} \, dt =, \\ &= \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \frac{\alpha(t^2 - t_0^2)}{2m} - \mu g(t - t_0), \end{aligned} \quad (2.58)$$

а скорость доски –

$$V = \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \int_{t_0}^t \frac{\mu mg}{M} \, dt = \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \frac{\mu mg}{M}(t - t_0). \quad (2.59)$$

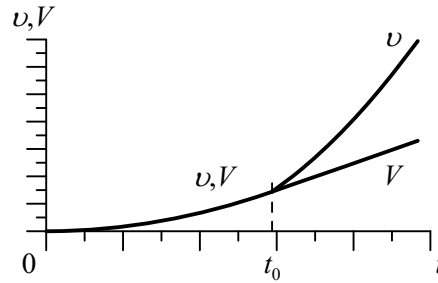


Рис. 2.8

На рис. 2.8 изображены полученные зависимости скоростей бруска и доски от времени.

Задача 2.5

(Прямая задача динамики)

Найти закон движения материальной точки, движущейся в однородном и постоянном силовом поле с начальной скоростью v_0 , направленной под произвольным углом α к силе F .

Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 2.9, при этом начало системы координат совпадает с положением материальной точки в начальный момент времени.

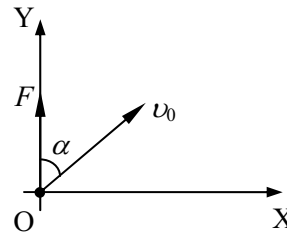


Рис. 2.9

II. Запишем уравнения движения материальной точки в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad (2.60)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = F. \quad (2.61)$$

III. Проинтегрируем уравнения (2.60) и (2.61), используя начальные значения скорости $v_x(0) = v_0 \sin \alpha$ и $v_y(0) = v_0 \cos \alpha$:

$$v_x(t) = v_0 \sin \alpha, \quad (2.62)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos \alpha + \frac{F}{m} t. \quad (2.63)$$

Интегрируя уравнения (2.62) и (2.63) с учетом начальных значений координат $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получаем закон движения материальной точки в координатной форме:

$$x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t, \quad (2.64)$$

$$y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{Ft^2}{2m}. \quad (2.65)$$

Исключив время из уравнений (2.64) и (2.65), получим уравнение траектории материальной точки – уравнение параболы:

$$y = \frac{F}{2m(\nu_0 \sin \alpha)^2} x^2 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot x \quad (2.66)$$

Таким образом, в однородном силовом поле материальная точка движется по параболе.

Задача 2.6

Тело небольших размеров движется по поверхности неподвижного клина с углом при основании α . В начальный момент времени скорость тела равнялась ν_0 и составляла угол φ_0 с ребром клина (см. рис. 2.10).

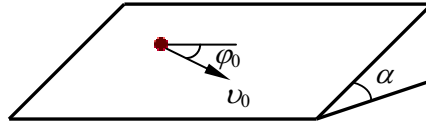


Рис. 2.10

Коэффициент трения тела о поверхность клина $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Найти установившуюся скорость скольжения тела.

Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 2.11 (вид сбоку) и рис. 2.12 (вид сверху на поверхность клина). Ось X направим вдоль наклонной плоскости параллельно ребру клина (рис. 2.12). При этом ось Y направим по наклонной плоскости перпендикулярно ребру клина, а ось Z перпендикулярно наклонной поверхности клина (рис. 2.11).

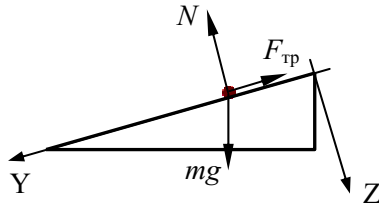


Рис. 2.11

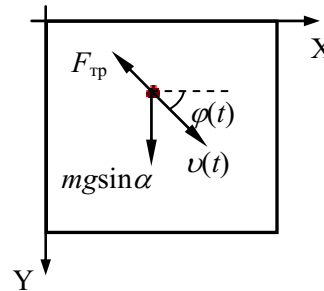


Рис. 2.12

На рис. 2.11 и 2.12 изображены также силы, действующие на тело в процессе движения: сила тяжести mg , сила нормальной реакции опоры N и сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$.

Скорость тела $\mathbf{u}(t)$ составляет с осью X угол $\varphi(t)$ (см. рис. 2.12), который является функцией времени.

II. Запишем уравнение движения тела в проекциях на выбранные оси системы координат:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_{\text{тр}} \cos \varphi, \quad (2.67)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \sin \varphi, \quad (2.68)$$

$$0 = -N + mg \cos \alpha. \quad (2.69)$$

Используем закон Амонтона – Кулона (см. п. 2.1.2.В) для силы трения скольжения и учтем заданную в условии задачи связь коэффициента трения μ с углом α при основании наклонной плоскости:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \operatorname{tg} \alpha \cdot N. \quad (2.70)$$

Запишем тригонометрические функции угла φ , выразив их через проекции скорости тела:

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \varphi = \frac{v_y}{v}. \quad (2.71)$$

III. Получена полная система уравнений (2.67) – (2.71) для определения проекций скорости тела на оси выбранной системы координат, решить которую в общем виде достаточно сложно из-за наличия в ней двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений. Однако нет необходимости находить закон изменения скорости тела. По условию задачи требуется определить установившуюся скорость тела, т.е. значение скорости в то время, когда сумма сил, действующих на тело, станет равной нулю.

Рассмотрим изменение характера движения тела со временем. В плоскости движения на тело действуют две силы: сила трения скольжения и проекция силы тяжести. Из (2.69) и (2.70) получим выражение для силы трения:

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha. \quad (2.77)$$

Как видим, модуль силы трения равен величине проекции силы тяжести на наклонную плоскость. Действующие на тело силы бу-

дут поворачивать вектор скорости тела до тех пор, пока он не совпадет по направлению с осью Y . Следовательно, ускорение обратится в ноль, когда сила трения будет направлена противоположно составляющей силы тяжести в плоскости движения тела. Дальнейшее движение будет происходить с постоянной скоростью $v_{уст}$, направленной вдоль оси Y .

Таким образом, достаточно найти уравнение, связывающее проекцию скорости тела на ось Y с модулем его скорости. Для этого преобразуем полученную систему уравнений (2.67) – (2.71) к виду:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{v} g \sin \alpha, \quad (2.72)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \left(1 - \frac{v_y}{v}\right) g \sin \alpha. \quad (2.73)$$

Производную от модуля скорости по времени представим в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) = \frac{v_x}{v} \cdot \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_y}{v} \cdot \frac{dv_y}{dt}. \quad (2.74)$$

Подстановка (2.72) и (2.73) в (2.74) приводит к уравнению:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dv_y}{dt}. \quad (2.75)$$

Интегрируя (2.75) с учетом начальных условий ($v(0) = v_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$), получаем:

$$v = -v_y + v_0(1 + \sin \varphi_0). \quad (2.76)$$

Подставляя $v = v_y = v_{уст}$ в (2.76), находим искомый модуль скорости установившегося движения:

$$v_{уст} = \frac{v_0}{2} (1 + \sin \varphi_0). \quad (2.78)$$

Проанализируем полученное выражение для установившейся скорости в двух частных случаях.

Если $\varphi_0 = \pi/2$ (начальная скорость тела направлена вниз по наклонной плоскости), то $v_{уст} = v_0$. Следовательно, движение тела сразу происходит с постоянной скоростью, поскольку действующие на него силы скомпенсированы.

При $\varphi_0 = -\pi/2$ скорость установившегося движения равна $v_{уст} = 0$. Начальная скорость, направленная вверх по наклонной плоскости, приводит к равнозамедленному движению. При этом и проекция силы тяжести, и сила трения скольжения направлены противоположно скорости. Через некоторое время скорость тела обращается в ноль. Сила трения становится силой трения покоя и меняет направление на противоположное. Движения вниз по наклонной плоскости не происходит, т.к. максимальное значение силы трения покоя в условиях данной задачи совпадает по модулю со значением проекции силы тяжести на наклонную плоскость.

Задача 2.7

Стальной шарик радиуса r начинает двигаться в сосуде, заполненном глицерином, под действием силы тяжести. Найти зависимость скорости шарика от времени $v(t)$, а также определить скорость установившегося движения шарика $v_{уст}$. Коэффициент вязкого трения в глицерине равен η , плотность глицерина – ρ_1 , плотность стали – ρ_2 . Считать, что сила вязкого трения определяется формулой Стокса: $F_b = 6\pi r v \eta$.

Решение

I. Выберем систему координат, связанную с сосудом, так, как показано на рис. 2.13. Начало координат совместим с положением шарика в момент начала его движения. В соответствии с условием задачи начальная скорость шарика равна нулю: $v(0) = 0$.

II. Запишем уравнение движения шарика в проекциях на ось X системы координат:

$$ma = mg - F_b - F_A, \quad (2.79)$$

где F_b – сила вязкого трения, а F_A – сила Архимеда.

Используем закон Архимеда и формулу Стокса, описывающие свойства этих сил:

$$F_A = \rho_1 g V, \quad (2.80)$$

$$F_b = 6\pi r v \eta. \quad (2.81)$$

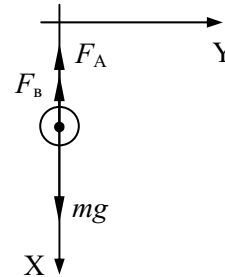


Рис. 2.13

Здесь $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ – объем шарика.

Выразим также массу шарика через его плотность:

$$m = \rho_2 V. \quad (2.82)$$

III. Подставляя (2.80) – (2.82) в уравнение движения (2.79), получаем:

$$\rho_2 V \frac{dv}{dt} = (\rho_2 - \rho_1) V g - 6\pi r v \eta. \quad (2.83)$$

Для решения уравнения (2.83) приведем его к виду

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} g - \frac{6\pi r \eta}{\rho_2 V} v = A - Bv \quad (2.84)$$

и сделаем замену переменных:

$$A - Bv = z. \quad (2.85)$$

Дифференцируя (2.85) по времени, получаем:

$$-B \frac{dv}{dt} = \frac{dz}{dt}. \quad (2.86)$$

С учетом (2.86) выражение (2.84) принимает следующий вид:

$$\frac{dz}{dt} = -Bz. \quad (2.87)$$

Решим полученное уравнение методом разделения переменных с учетом начального значения скорости $v(0) = 0$:

$$z = Ae^{-Bt}. \quad (2.88)$$

Используя формулу (2.85), вернемся к старой переменной v :

$$v = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt}). \quad (2.89)$$

Подставив значения констант A и B из (2.84), а также значение V , получим выражение для скорости шарика:

$$v = (\rho_2 - \rho_1) g \frac{2r^2}{9\eta} \left(1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2 \rho_2} t\right) \right). \quad (2.90)$$

При $t \gg \frac{2r^2 \rho_2}{9\eta}$ скорость движения шарика практически не изменяется и равна

$$v_{\text{уст}} = (\rho_2 - \rho_1) g \frac{2r^2}{9\eta}. \quad (2.91)$$

Задача 2.8

Брусok скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (рис. 2.14). Определить время, через которое брусok покинет эту область. Радиус кривизны забора R , коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора μ . Размеры бруска много меньше R .

Решение

I. Выберем произвольную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с забором. Изобразим на рисунке тангенциальную ось, заданную ортом τ , направленную вдоль скорости движения бруска, и нормальную ось, заданную ортом n , направленную к центру кривизны траектории перпендикулярно скорости (см. теоретический материал в Главе 1).

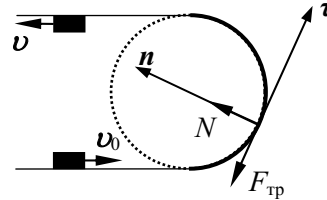


Рис. 2.14

II. Запишем уравнения движения бруска относительно инерциальной системы отсчета, жестко связанной с забором, в проекциях на тангенциальную и нормальную оси:

$$ma_\tau = m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{тр}}, \quad (2.95)$$

$$ma_n = m \frac{v^2}{R} = N. \quad (2.96)$$

Воспользуемся законом Амонтона – Кулона для силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (2.97)$$

III Из (2.95) – (2.97) получим уравнение для определения модуля скорости бруска:

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R}. \quad (2.98)$$

Решая уравнение (2.98) методом разделения переменных, получим:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R} dt, \quad (2.99)$$

 $F_{\text{тр}}$

$$\frac{1}{v} = \frac{\mu}{R} t + C. \quad (2.100)$$

Константу C в (2.100) определим из начальных условий ($v(0) = v_0$): $C = \frac{1}{v_0}$.

Таким образом, модуль скорости бруска в момент времени t , когда брусок еще движется вдоль забора, определяется следующим образом:

$$v = v_0 \frac{1}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t}. \quad (2.101)$$

Заметим, что для любого момента времени t и при любой, не равной нулю, начальной скорости v_0 , скорость бруска $v > 0$. Это означает, что брусок не остановится, а обязательно пройдет всю область, ограниченную забором, поскольку с уменьшением скорости движения бруска уменьшается и сила трения скольжения между бруском и забором.

Путь, пройденный телом за время dt с момента времени t , при движении вдоль забора, равен:

$$ds = v dt = v_0 \frac{1}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t} dt. \quad (2.102)$$

Путь, пройденный телом за время t движения вдоль забора получим интегрированием (2.102) по времени:

$$s = \frac{R}{\mu} \ln \left(1 + \frac{\mu v_0}{R} t \right). \quad (2.103)$$

Для определения времени, через которое брусок покинет область, ограниченную забором преобразуем (2.103) к виду:

$$t = \frac{R}{\mu v_0} \left(e^{\frac{\mu}{R} s} - 1 \right). \quad (2.104)$$

Поскольку длина забора $s = \pi R$ искомое время движения бруска вдоль забора t_0 равно:

$$t_0 = \frac{R}{\mu v_0} (e^{\pi \mu} - 1). \quad (2.105)$$

При малых значениях коэффициента трения ($\pi\mu \ll 1$) время движения бруска t_0 будет равно

$$t_0 = \frac{R}{\mu v_0} (e^{\pi\mu} - 1) = \frac{R}{\mu v_0} ((1 + \pi\mu + \dots) - 1) \cong \frac{\pi R}{v_0}. \quad (2.106)$$

Задача 2.9

На столе лежит доска массой $M = 1$ кг, а на доске – груз массой $m = 2$ кг. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской равен $\mu_1 = 0,25$, а между доской и столом – $\mu_2 = 0,5$.

Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 2.15 и изобразим силы, действующие на тела системы.

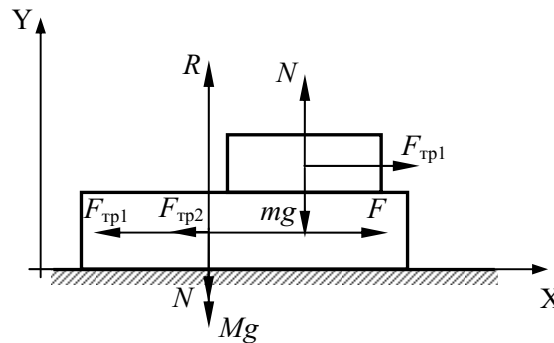


Рис. 2.15

На груз в процессе движения действуют сила тяжести mg , сила трения $F_{тр1}$ и сила нормальной реакции доски N . К доске приложены горизонтальная сила F , сила тяжести Mg , сила нормальной реакции стола R , сила нормального давления груза N и силы трения со стороны груза и стола $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$. Силами сопротивления воздуха пренебрегаем.

Проанализируем характер движения тел системы. Если приложенная к доске сила F мала, то груз и доска движутся с одинаковым ускорением (или покоятся), а сила трения $F_{тр1}$ между грузом и доской является силой трения покоя. С увеличением внешней силы

F сила трения $F_{\text{тр1}}$ возрастает и при некотором значении внешней силы F_0 достигает своего максимального значения, равного силе трения скольжения. Это значение силы F_0 и требуется определить для решения задачи.

II. Запишем уравнения движения груза и доски в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$ma = F_{\text{тр1}}, \quad (2.107)$$

$$0 = N - mg, \quad (2.108)$$

$$MA = F - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}}, \quad (2.109)$$

$$0 = R - N - Mg. \quad (2.110)$$

Здесь a и A – проекции ускорений груза и доски на ось X .

Используем закон Амонтона – Кулона, описывающий свойство силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр2}} = \mu_2 R. \quad (2.111)$$

Значение силы F_0 , действующей на груз, при котором начнется его скольжение по доске, можно определить из условий:

$$a = A, \quad (2.112)$$

$$F_{\text{тр1}} = \mu_1 N. \quad (2.113)$$

III. Решим полученную систему уравнений (2.107) – (2.113) относительно F_0 :

$$F_0 = (M + m)a + F_{\text{тр2}} = (M + m)g(\mu_1 + \mu_2). \quad (2.114)$$

Таким образом, для того, чтобы доска выскользнула из-под груза, необходимо приложить к доске силу F , удовлетворяющую условию:

$$F \geq F_0 = (M + m)g(\mu_1 + \mu_2). \quad (2.115)$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем:

$$F \geq F_0 = 22,5 \text{ Н}. \quad (2.116)$$

Задача 2.10

(Обратная задача динамики)

Найти модуль и направление силы F , действующей на частицу массой m при ее движении в плоскости XY по эллиптической траектории. Закон движения частицы в координатной форме имеет

вид $x(t) = A \sin(\omega t)$, $y(t) = B \cos(\omega t)$, где A , B , ω – постоянные величины.

Решение

I. Используем декартову систему координат, как предложено в условии задачи.

II. Запишем уравнение движения частицы в проекциях на оси заданной системы координат:

$$ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad (2.117)$$

$$ma_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y. \quad (2.118)$$

Используем заданный в условии задачи закон движения:

$$x(t) = A \sin(\omega t), \quad (2.119)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t). \quad (2.120)$$

III. Дифференцируя (2.119) и (2.120) дважды по времени, получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t), \quad (2.121)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -B\omega^2 \cos(\omega t). \quad (2.122)$$

Подставляя (2.121) и (2.122) в (2.117) и (2.118), получаем закон изменения проекций силы $\mathbf{F}$, действующей на частицу при ее движении в плоскости XY по эллиптической траектории:

$$F_x(t) = -mA\omega^2 \sin(\omega t), \quad (2.123)$$

$$F_y(t) = -mB\omega^2 \cos(\omega t). \quad (2.124)$$

Используя (2.123) и (2.124), получаем выражение для модуля силы $\mathbf{F}$:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 \sqrt{A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)}. \quad (2.125)$$

Запишем закон изменения силы в векторном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= F_x(t)\mathbf{i} + F_y(t)\mathbf{j} = -mA\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{i} - mB\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{j} = \\ &= -m\omega^2 \mathbf{r}(t), \end{aligned} \quad (2.126)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы относительно начала координат. Следовательно, сила $\mathbf{F}$, действующая на частицу, направлена противоположно радиус-вектору частицы в любой момент времени.

Задача 2.11

Однородный упругий стержень движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием постоянной горизонтальной силы F_0 , равномерно распределенной по его торцу. Длина стержня и площадь его торца в недеформированном состоянии равны l_0 и S_0 , модуль Юнга материала стержня – E , коэффициент Пуассона – μ . Определить зависимости напряжения упругих сил $\sigma(x)$ и относительной деформации $\varepsilon(x)$ от координаты x вдоль стержня, а также относительное удлинение стержня.

Решение

I. Выберем декартову систему координат с осью X (см. рис. 2.16), направленной вдоль стержня. При ускоренном движении стержня под действием горизонтальной силы F_0 в нем возникают внутренние упругие силы и продольные деформации, различные в разных сечениях, а также изменения поперечных размеров. Деформации, возникающие в стержне, будем считать малыми, а напряжения возникающих при этом упругих сил $\sigma(x)$ – подчиняющимися закону Гука (2.11).

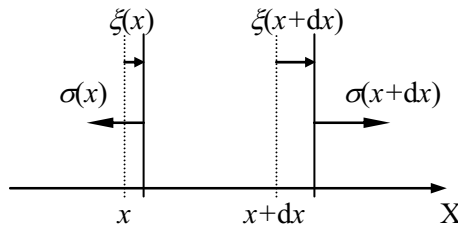


Рис. 2.16

II. Рассмотрим слой dx недеформированного стержня с координатой x вдоль него (см. рис. 2.16). Масса dm выделенного элемента стержня не изменяется при деформации и остается равной

$$dm = \frac{m}{l_0} dx, \quad (2.127)$$

где m – масса всего стержня.

Уравнение движения рассматриваемого элемента стержня в проекции на ось X под действием напряжений упругих сил запишем в виде:

$$\begin{aligned} dma = S(x + dx + \xi(x + dx))\sigma(x + dx + \xi(x + dx)) - \\ - S(x + \xi(x))\sigma(x + \xi(x)) \approx S(x) \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Здесь a – проекция ускорения стержня на ось X , $\xi(x)$ и $\xi(x+dx)$ – смещения левой и правой границ выделенного фрагмента при деформации (см. рис.2.16); $S(x + \xi(x))$ и $S(x + dx + \xi(x + dx))$ – площади поперечных сечений стержня на границах выделенной области. Поскольку деформации можно считать малыми, то в выражении (2.128) отброшены члены второго порядка малости не только по dx ,

но и по относительной продольной деформации $\varepsilon(x) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$.

Дифференциальное уравнение (2.128) дополним граничным условием для напряжения упругих сил:

$$\sigma(x = 0) = 0. \quad (2.129)$$

Ускорение a , одинаковое в установившемся режиме для всех точек стержня, в соответствии со вторым законом Ньютона определяется выражением:

$$a = \frac{F_0}{m}. \quad (2.130)$$

При движении стержня с ускорением возникающие неоднородные продольные деформации приводят к различным в разных сечениях поперечным деформациям и, следовательно, изменению площади поперечных сечений стержня $S(x)$:

$$S(x) = S_0(1 - \mu\varepsilon(x))^2 \approx S_0(1 - 2\mu\varepsilon(x)). \quad (2.131)$$

Напряжения упругих сил связаны с продольными деформациями законом Гука:

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x). \quad (2.132)$$

III. Преобразуя записанную систему уравнений (2.127), (2.128) и (2.130) – (2.132), получаем дифференциальное уравнение для напряжений упругих сил:

$$\frac{F_0}{l_0} = S_0 \left(1 - 2\mu \frac{\sigma(x)}{E} \right) \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}. \quad (2.133)$$

Интегрируя (2.133) методом разделения переменных с учетом граничных условий (2.129), получаем:

$$\frac{F_0 x}{l_0} = S_0 \sigma(x) - \frac{S_0 \mu}{E} \sigma(x)^2. \quad (2.134)$$

Решение уравнения (2.134) относительно $\sigma(x)$ имеет вид:

$$\sigma(x) = \frac{E}{2\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F_0 \mu x}{S_0 l_0 E}} \right). \quad (2.135)$$

Запишем искомое выражение для распределения напряжений упругих сил вдоль стержня с учетом малости второго слагаемого в подкоренном выражении (2.135):

$$\sigma(x) = \frac{F_0 x}{S_0 l_0}. \quad (2.136)$$

Следовательно, распределение деформаций вдоль стержня в соответствии с законом Гука имеет вид:

$$\varepsilon(x) = \frac{F_0 x}{S_0 l_0 E}. \quad (2.137)$$

Полное продольное удлинение стержня находим, интегрируя (2.137):

$$\Delta l = \xi(l_0) = \int_0^{l_0} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \int_0^{l_0} \varepsilon(x) dx = \frac{F_0 l_0}{2 S_0 E}. \quad (2.138)$$

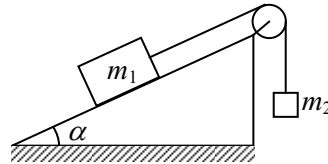
Искомое относительное удлинение стержня равно:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F_0}{2 S_0 E}. \quad (2.139)$$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

На неподвижном клине с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ находится тело массой m_1 , к которому прикреплена легкая нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, жестко связанный с клином. К другому концу нити прикреплено тело массой m_2 , не касающееся клина (см. рис.). От-



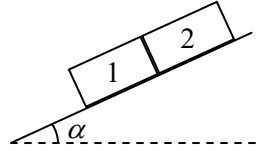
ношение масс тел $\eta = m_2/m_1 = 2/3$. Коэффициент трения между первым телом и плоскостью равен $\mu = 0.1$. Найти величину и направление ускорения второго тела.

Ответ: ускорение второго тела направлено вниз и равно

$$a_2 = g(\eta - \sin \alpha - \mu \cos \alpha)/(\eta + 1) = 0.05g.$$

Задача 2

На наклонную поверхность, составляющую угол α с горизонтом, положили два бруска 1 и 2 (см. рис.). Массы брусков равны m_1 и m_2 , коэффициенты трения между поверхностью и этими брусками – μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 > \mu_2$. Найти силу давления одного бруска на другой, возникающую в процессе их скольжения, и углы α , при которых будет скольжение брусков.



Ответ: $F = \frac{(\mu_1 - \mu_2)m_1m_2g \cos \alpha}{m_1 + m_2}$; $\alpha > \arctg \frac{\mu_1m_1 + \mu_2m_2}{m_1 + m_2}$.

Задача 3

Материальная точка массой m движется по гладкой внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом R . Найти модуль силы давления материальной точки на стенку цилиндра в тот момент, когда ее скорость составляет угол α с горизонтом и по модулю равна v_0 .

Ответ: $F = (mv_0^2/R)\cos^2 \alpha$.

Задача 4

Частица движется вдоль оси X по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти модули силы в точке поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Ответ: $-F_0$, $-2F_0$.

Задача 5

На гладкой горизонтальной поверхности лежит клин массой M с углом при основании α . Тело массой m скользит по наклонной поверхности клина. Коэффициент трения между клином и телом равен μ . Найти горизонтальные проекции ускорений тела и клина, а также силы N и R , с которыми тело давит на клин и клин на горизонтальную поверхность.

Ответ:

$$a_m = \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)}, \quad a_M = -\frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\frac{M}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)},$$

$$N = \frac{mg}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)}, \quad R = \left(\frac{m(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)} + M \right) g.$$

Задача 6

Нить перекинута через легкий вращающийся без трения блок. На одном конце нити прикреплен груз массой M , а по другой свисающей части нити скользит муфточка массой m с постоянным ускорением a' относительно нити. Найти силу трения, с которой нить действует на муфточку.

Ответ: $F_{\text{тр}} = (2g - a')mM/(m + M)$.

Задача 7

Пуля, пробивая доску толщиной h , изменяет свою скорость от v_0 до v . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

Ответ: $t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln \left(\frac{v_0}{v} \right)}.$

Задача 8

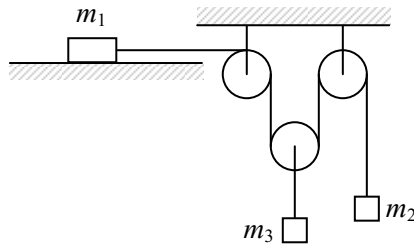
Через блок, ось которого горизонтальна, перекинута нерастяжимая веревка длиной l . За концы веревки держатся две обезьяны одинаковой массой, находящиеся на одинаковом расстоянии l от

блока. Обезьяны начинают одновременно подниматься вверх, причем одна из них поднимается относительно веревки со скоростью v , а другая со скоростью $2v$. Через какие интервалы времени каждая из обезьян достигнет блока? Массами блока и веревки пренебречь.

Ответ: $t_1 = t_2 = \frac{2l}{3v}$.

Задача 9

Система трех тел, связанных между собой с помощью двух нитей и трех блоков, изображена на рисунке. Два тела подвешены на нитях, а третье находится на горизонтальной поверхности. Оси крайних блоков, в отличие от оси среднего блока, закреплены (см. рис.).



Считая заданными массы m_1 и m_2 , определить массу m_3 , при которой ось среднего блока будет оставаться неподвижной. Трением и массами блоков и нитей пренебречь.

Ответ: $m_3 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}$.

Задача 10

Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения μ между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом $R = 200$ м на скорости $v = 100$ км/ч?

Ответ: $\mu = \frac{v^2}{Rg} \approx 0.4$.

Задача 11.

Однородный упругий стержень массой m подвесили за один конец к потолку. Длина и площадь поперечного сечения стержня в недеформированном состоянии – l_0 и S_0 , модуль Юнга материала стержня равен E , а коэффициент Пуассона – μ . Определить относительное удлинение стержня под действием силы тяжести, а также относительное изменение его объема.

Ответ: $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{mg}{2ES_0}$; $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(1-2\mu)mg}{2ES_0}$.

ГЛАВА 3

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

3.1. Теоретический материал

Центр масс механической системы (системы материальных точек) – точка пространства, радиус-вектор которой $\mathbf{r}_{\text{цм}}$ равен

$$\mathbf{r}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (3.1)$$

где $m = \sum_i m_i$ – масса механической системы, $\mathbf{r}_i$ и m_i – радиус-вектор и масса i -ой материальной точки системы.

Скорость центра масс $\mathbf{v}_{\text{цм}}$ – физическая величина, равная

$$\mathbf{v}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{m}. \quad (3.2)$$

где $\mathbf{v}_i$ – скорость i -ой материальной точки системы.

Ускорение центра масс $\mathbf{a}_{\text{цм}}$ – физическая величина, равная

$$\mathbf{a}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{m}. \quad (3.3)$$

где $\mathbf{a}_i$ – ускорение i -ой материальной точки системы.

3.1.1. Импульс механической системы

Импульс (количество движения) материальной точки $\mathbf{p}$ – физическая величина, равная произведению массы материальной точки на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (3.4)$$

Импульс механической системы $\mathbf{P}$ – физическая величина, равная сумме импульсов материальных точек, из которых состоит система:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_{\text{цм}} \equiv \mathbf{p}_{\text{цм}}. \quad (3.5)$$

Теорема о движении центра масс механической системы (уравнение движения центра масс) – произведение массы системы на ускорение ее центра масс относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех внешних сил $\mathbf{F}^{\text{ex}}$, действующих на механическую систему со стороны тел, не входящих в систему.

В соответствии со вторым и третьим законами Ньютона (см. Главу 2):

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_{\text{цм}} = \sum_j \mathbf{F}_j = \sum_j \mathbf{F}_j^{\text{ex}} + \sum_j \mathbf{F}_j^{\text{in}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}. \quad (3.6)$$

где $\mathbf{F}_j^{\text{ex}}$ – сумма внешних сил, действующих на j -ую материальную точку механической системы, $\mathbf{F}_j^{\text{in}} = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}^{\text{in}}$ – сумма внутренних

сил, действующих на j -ую материальную точку механической системы со стороны других материальных точек, входящих в систему.

Импульс силы $\mathbf{F}$ за физически бесконечно малый интервал времени dt , в течение которого она действует, – физическая величина, равная произведению силы на этот интервал времени: $\mathbf{F} dt$.

Закон изменения импульса механической системы – изменение импульса механической системы относительно инерциальной системы отсчета за физически бесконечно малый интервал времени dt равно импульсу суммы внешних сил, действующих на систему в этот интервал времени:

$$d\mathbf{P} = \mathbf{F}^{\text{ex}} dt. \quad (3.7)$$

Для конечного интервала времени

$$\Delta \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{\text{ex}} dt, \quad (3.8)$$

где t_1 и t_2 – начальный и конечный моменты рассматриваемого интервала времени.

Закон изменения проекции импульса механической системы – изменение проекции импульса механической системы относительно инерциальной системы отсчета на неподвижное относительно этой системы направление (задаваемое единичным вектором $\mathbf{n}$) равно проекции на то же направление импульса суммы внешних сил, действующих на систему:

$$dP_n = F_n^{\text{ex}} dt, \quad (3.10)$$

$$\Delta P_n \equiv P_n(t_2) - P_n(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_n^{\text{ex}} dt. \quad (3.11)$$

Изолированная механическая система – механическая система, на которую не действуют внешние силы: $F_j^{\text{ex}} = 0$.

Замкнутая механическая система – механическая система, для которой сумма всех внешних сил равна нулю: $\sum_j F_j^{\text{ex}} = F^{\text{ex}} = 0$.

Закон сохранения импульса механической системы – если механическая система замкнута, то ее импульс относительно инерциальной системы отсчета сохраняется:

$$\Delta P \equiv P(t_2) - P(t_1) = 0. \quad (3.12)$$

Замкнутая в данном направлении механическая система – механическая система, для которой проекция суммы всех внешних сил на неподвижное относительно инерциальной системы отсчета направление n равна нулю: $F_n^{\text{ex}} = 0$.

Закон сохранения проекции импульса механической системы – если система замкнута в данном направлении, то проекция ее импульса относительно инерциальной системы отсчета на это направление сохраняется:

$$\Delta P_n \equiv P_n(t_2) - P_n(t_1) = 0. \quad (3.13)$$

Движение тела с переменной массой.

Рассмотрим движение тела с переменной массой. Пусть $M(t)$ – масса тела в момент времени t и $dm = -dM$ – масса отделившихся частиц за время dt (см. рис. 3.1).

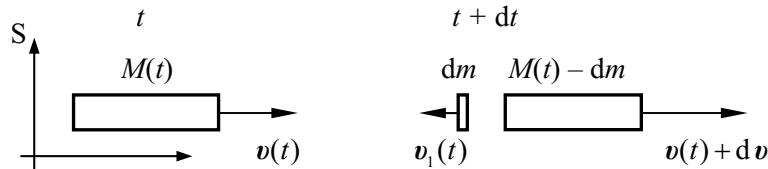


Рис. 3.1. Характеристики тела и отделяющихся от него частиц в моменты времени t и $t + dt$

Запишем импульс тела в момент времени t и импульс тела с отделившимися от него частицами в момент времени $t + dt$:

$$\mathbf{P}(t) = M(t)\mathbf{v}(t), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{P}(t + dt) = (M(t) - dm)(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v}) + dm\mathbf{v}_1(t). \quad (3.15)$$

Здесь $\mathbf{v}(t)$ – скорость тела в момент времени t , $d\mathbf{v}$ – изменение скорости тела за время dt , $\mathbf{v}_1$ – скорость отделившихся частиц.

С точностью до бесконечно малых величин второго порядка изменение импульса механической системы, состоящей из тела и отделившихся от него за время dt частицами, равно

$$\mathbf{P}(t + dt) - \mathbf{P}(t) = M(t)d\mathbf{v} + dm\mathbf{u}(t), \quad (3.16)$$

где $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}(t)$ – скорость отделяющихся частиц относительно тела.

Записав закон изменения импульса для рассматриваемой механической системы, получим уравнение движения для тела с переменной массой $M(t)$, т.е. **уравнение Мещерского**:

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = M(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}}, \quad (3.17)$$

$$M(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}} - \mu\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}} + \mathbf{F}_p(t). \quad (3.18)$$

Здесь $\mathbf{F}^{\text{ex}}$ – внешняя сила, действующая на тело, $\mu = \frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ – скорость изменения массы тела, взятая с обратным знаком, так называемый **расход топлива**, $\mathbf{F}_p(t) \equiv -\mu\mathbf{u}(t)$ – **реактивная сила**, действующая на тело со стороны отделяющихся от него частиц.

3.1.2. Работа сил

Работа силы $\mathbf{F}$ при бесконечно малом перемещении $d\mathbf{r}$ материальной точки, на которую действует сила (**точки приложения силы**), равна скалярному произведению силы на это перемещение:

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.19)$$

Работа силы $\mathbf{F}$ при конечном перемещении материальной точки, на которую действует сила, равна:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (3.20)$$

Здесь r_1 и r_2 – радиус-векторы точки в начальный и конечный моменты времени.

Заметим, что в общем случае работа силы зависит от выбора системы отсчета, а также от траектории движения материальной точки, на которую действует сила (не только от начального и конечного положения материальной точки).

Мощность – физическая величина, численно равная работе, совершаемой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \quad (3.21)$$

А. Работа потенциальных сил

Потенциальная сила F^p – сила, работа которой не зависит от вида траектории, а только от начального и конечного положений точки приложения силы. Работа потенциальной силы по замкнутой траектории равна нулю¹.

Потенциальные силы, действующие на тела системы, могут быть **внутренними** $F^{p, \text{in}}$ и **внешними** $F^{p, \text{ex}}$.

Центральные силы – силы, направленные вдоль прямой, соединяющей точку их приложения с единым силовым центром, величина которых зависит только от расстояния до этого центра:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} , \quad (3.22)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы относительно силового центра, а $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние от этой точки до силового центра.

Центральные силы потенциальны. Рассмотрим два случая.

1. Одинокрая центральная сила.

Если выбрать начало системы отсчета S в силовом центре O (см. рис. 3.2), то работа силы (3.21) при физически бесконечно ма-

¹ Здесь и далее рассматриваются только **стационарные** потенциальные силы, которые **явно не зависят от времени**, а **только** от координат тел системы, которые сами могут зависеть от времени.

лом перемещении точки ее приложения относительно выбранной системы отсчета равна:

$$dA = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = F(r) dr. \quad (3.23)$$

Здесь учтено, что

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r}. \quad (3.24)$$

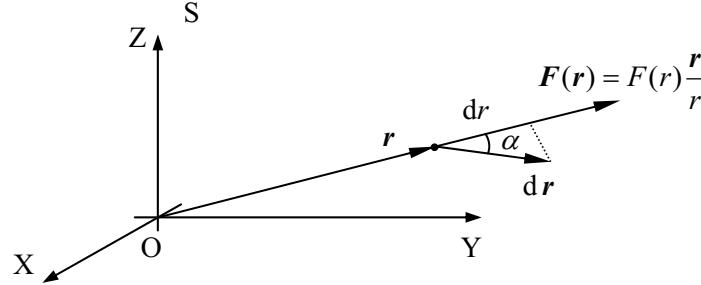


Рис. 3.2. Центральная сила с неподвижным относительно системы отсчета S силовым центром O

Работа центральной силы при конечном перемещении ее точки приложения равна

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = f(r_2) - f(r_1), \quad (3.25)$$

где $f(r)$ – первообразная функции $F(r)$.

Как видим, работа центральной силы с неподвижным относительно системы отсчета жестко связанной с силовым центром зависит лишь от расстояний до силового центра.

2. Парные центральные силы.

Парные центральные силы – это две силы, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, которые одинаковы по величине, противоположно направлены вдоль прямой, соединяющей точки приложения этих сил (см. рис. 3.3) – $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, и величины которых зависят только от расстояния между точками их приложения. Для парных центральных сил

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = F(r_{12}) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (3.26)$$

и работа этих сил зависит лишь от расстояния между точками их приложения:

$$\begin{aligned} dA &= \delta A_{12} + \delta A_{21} = \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_{12} \cdot (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = \\ &= \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = F(r_{12}) \frac{r_{12}}{r_{12}} \cdot d\mathbf{r}_{12} = F(r_{12}) d\mathbf{r}_{12}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

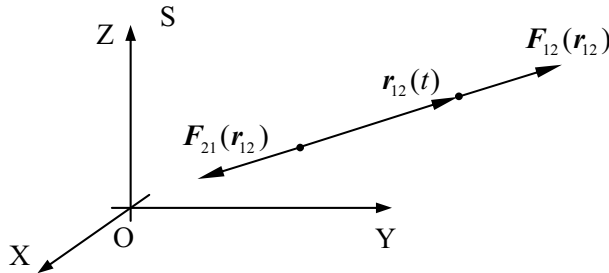


Рис. 3.3. Взаимная ориентация парных центральных сил

Постоянные силы потенциальны (однородное силовое поле потенциально):

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (3.28)$$

Силы упругости потенциальны. При упругом взаимодействии двух произвольно движущихся материальных точек упругая сила, действующая на одну из материальных точек, в общем случае не является потенциальной, а обе – потенциальны, поскольку они являются парными и центральными.

Б. Работа непотенциальных сил

Непотенциальные силы $\mathbf{F}^{\text{нр}}$ – силы, работа которых зависит не только от начального и конечного положений точки приложения силы, но и от вида ее траектории.

Силы трения (см. п. 2.1.2.В в Главе 2) являются непотенциальными силами.

Работа силы трения может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от взаимной ориентации силы и перемещения материальной точки, на которую она действует.

Работа пары сил трения покоя, возникающих при взаимодействии двух тел, равна нулю²:

$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F}_{n1} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{n2} \cdot d\mathbf{r}_2 = \\ &= (\mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2}) \cdot d\mathbf{r}_1 = (\mathbf{F}_{n1} - \mathbf{F}_{n1}) \cdot d\mathbf{r}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь использован третий закон Ньютона ($\mathbf{F}_{n2} = -\mathbf{F}_{n1}$) и условие неподвижности одного тела относительно другого $d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}_1$.

Работа пары сил трения скольжения всегда отрицательна:

$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F}_{ck1} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{ck2} \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_{ck1} \cdot d\mathbf{r}_1 - \mathbf{F}_{ck1} \cdot d\mathbf{r}_2 = \\ &= \mathbf{F}_{ck1} \cdot (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) = \mathbf{F}_{ck1} \cdot \mathbf{v}_{отн} dt < 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $\mathbf{v}_{отн}$ – скорость движения первого тела относительно второго. При записи (3.30) использован третий закон Ньютона ($\mathbf{F}_{ck2} = -\mathbf{F}_{ck1}$) и закон Амонтона–Кулона для определения направления силы трения скольжения (см. (2.14) в Главе 2).

3.1.3. Энергия механической системы

Потенциальная энергия механической системы E^p – физическая величина, равная сумме работ потенциальных сил, действующих на тела системы, при изменении положения тел системы в пространстве из данного (состояние 1) в любое наперед заданное (состояние 0), называемое нулем отсчета потенциальной энергии:

$$dE^p = -\sum_i \mathbf{F}_i^p \cdot d\mathbf{r}_i = -dA^p, \quad (3.31)$$

$$E^p = E_1^p - E_0^p = \int_0^1 dE^p = -\int_0^1 dA^p = A_{1 \rightarrow 0}^p. \quad (3.32)$$

Поскольку потенциальные силы могут быть внутренними и внешними, то в общем случае потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий взаимодействия тел системы друг с другом (конфигурации системы) $E^{p,ин}$ и с внешними по отношению к системе телами (во внешних полях, которые должны быть стационарны) $E^{p,ex}$:

² Это утверждение справедливо для любой пары сил, возникающих при взаимодействии двух неподвижных относительно друг друга тел.

$$dE^p = -\left(\sum_i \mathbf{F}_i^{p,in} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{p,ex} \cdot d\mathbf{r}_i\right) = -\left(dA^{p,in} + dA^{p,ex}\right) = \\ = dE^{p,in} + dE^{p,ex}, \quad (3.33)$$

$$E_1^p = E_1^{p,in} + E_1^{p,ex} = A_{1 \rightarrow 0}^{p,in} + A_{1 \rightarrow 0}^{p,ex}. \quad (3.34)$$

Кинетическая энергия материальной точки – физическая величина, равная:

$$E^k = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.35)$$

Кинетическая энергия механической системы – сумма кинетических энергий материальных точек, из которых состоит механическая система:

$$E^k = \sum_i E_i^k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (3.36)$$

Механическая энергия системы – сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы:

$$E = E^k + E^p. \quad (3.37)$$

Закон изменения механической энергии системы – изменение механической энергии системы равно работе внутренних $\mathbf{F}_i^{np,in}$ и внешних $\mathbf{F}_i^{np,ex}$ непотенциальных³ сил:

$$dE = -\left(\sum_i \mathbf{F}_i^{np,in} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{np,ex} \cdot d\mathbf{r}_i\right) = \\ = -\left(\delta A^{np,in} + \delta A^{np,ex}\right) = \delta A^{np}, \quad (3.38)$$

или для конечного интервала времени

$$\Delta E = \Delta A^{np}. \quad (3.39)$$

Этот закон является в механике Ньютона "теоремой" и может быть получен из второго и третьего законов Ньютона.

Закон сохранения механической энергии системы – если работа всех непотенциальных сил равна нулю, то механическая

³ Если при записи потенциальной энергии механической системы была учтена работа не всех потенциальных сил, то при использовании закона изменения механической энергии системы эту работу необходимо добавить к работе непотенциальных сил в (3.34).

энергия системы относительно инерциальной системы отсчета сохраняется.⁴

$$\Delta E \equiv E(t_2) - E(t_1) = 0 \text{ или } E(t_1) = E(t_2). \quad (3.40)$$

Закон сохранения механической энергии системы является прямым следствием закона ее изменения (3.39).

Консервативная система – механическая система, для которой сохраняется ее механическая энергия.

3.1.4. Столкновение тел

Удар (соударение) – кратковременное взаимодействие тел при непосредственном соприкосновении, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором кинетическая энергия тел до соударения равна кинетической энергии тел после соударения.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором соударяющиеся тела приобретают одинаковую скорость после соударения.

3.2. Основные типы задач и методы их решения

3.2.1. Классификация задач

Большинство задач на законы сохранения (или изменения) для механической системы можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям:

- 1) закон сохранения (или изменения) импульса,
- 2) закон сохранения (или изменения) механической энергии,
- 3) движение тел с переменной массой (с использованием закона изменения импульса),
- 4) абсолютно упругое соударение тел (с использованием законов сохранения импульса и механической энергии),
- 5) абсолютно неупругое соударение тел (с использованием закона сохранения импульса).

⁴ В случае, когда под потенциальной энергией системы понимается потенциальная энергия ее конфигурации, закон сохранения механической энергии фор-

3.2.2. Общая схема решения задач

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Провести анализ действующих на тела системы сил (потенциальные и непотенциальные силы), используя законы, описывающие их индивидуальные свойства.
5. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).
6. Выбрать механическую систему и рассматриваемый интервал (начальный и конечный моменты) времени.

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Выбрать законы сохранения и записать их в выбранной системе отсчета для выбранной механической системы и выбранного интервала времени в рамках выбранной модели.
2. Записать уравнения кинематических связей.
3. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечание.

Пункты I.6 – II.2 в случае необходимости выполняются неоднократно.

мулируется так – если работа внешних сил и внутренних непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы сохраняется.

3.3. Примеры решения задач

Задача 3.1

(Закон сохранения импульса)

Ствол игрушечной пушки направлен под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если она не закреплена и может скользить по абсолютно гладкой поверхности. Модуль скорости снаряда относительно пушки сразу после выстрела равен $v_0 = 2,2$ м/с, а его масса в $k = 10$ раз меньше массы пушки.

Решение

Для решения задачи воспользуемся общей схемой решения задач механики с помощью законов сохранения.

I. Выберем систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Ось X декартовой системы координат направим горизонтально, а ось Y – вертикально вверх. Определимся с моделями материальных объектов и явлений. Система тел «пушка + снаряд» является замкнутой вдоль оси X в течение интервала времени от момента, предшествующего выстрелу пушки, до момента времени сразу после выстрела, поскольку в соответствии с условиями задачи сил трения, действующих на тела системы, нет.

II. Запишем закон сохранения проекции импульса (3.13) на ось X для выбранной системы тел и рассматриваемого интервала времени:

$$m_{\text{п}} v_{\text{п}} + m_{\text{с}} v_{\text{сх}} = 0. \quad (3.41)$$

Здесь $v_{\text{п}}$ и $v_{\text{сх}}$ – проекции скоростей пушки и снаряда после выстрела на ось X .

Проекция на ось X неизвестной скорости снаряда относительно лабораторной системы отсчета $v_{\text{сх}}$ связана с проекциями скорости пушки $v_{\text{п}}$ и относительной скорости снаряда v_0 следующим образом:

$$v_{\text{сх}} = v_{\text{п}} + v_0 \cos \alpha. \quad (3.42)$$

Используем также заданное в условии задачи соотношение между массами снаряда и пушки:

$$\frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{с}}} = k. \quad (3.43)$$

III. Решая систему уравнений (3.41) – (3.43), находим искомое выражение для проекции скорости пушки на ось X после выстрела:

$$v_{\text{п}} = -v_0 \cos \alpha \frac{m_{\text{с}}}{m_{\text{с}} + m_{\text{п}}} = -v_0 \cos \alpha \frac{1}{1+k}. \quad (3.44)$$

Подставляя в (3.44) значения физических величин, заданных в условии задачи, получаем

$$v_{\text{п}} \cong -0,14 \text{ м/сек}. \quad (3.45)$$

Задача 3.2

(Закон сохранения импульса)

Две одинаковые тележки, на каждой из которых находится по человеку, движутся без трения по инерции навстречу друг другу по параллельным рельсам. Когда тележки поравнялись, с каждой из них на другую перепрыгнул человек в направлении, перпендикулярном к движению тележек. В результате первая тележка остановилась, а скорость второй стала равна V . Найти модули первоначальных скоростей тележек V_1 и V_2 , если масса каждой тележки равна M , а масса каждого человека – m .

Решение

I. В соответствии с общей схемой решения задач на законы сохранения определимся с моделями материальных объектов и явлений. Пренебрегая сопротивлением воздуха, будем считать, что скорость каждого человека сразу после прыжка равна его скорости непосредственно перед приземлением на другую тележку.

На рис. 3.4 показано состояние системы тел для трех моментов времени: t_1 – непосредственно перед прыжком, t_2 – момент, когда оба человека находятся в полете, t_3 – сразу после приземления.

На рис. 3.4 также изображена выбранная система координат XY , жестко связанная с рельсами, и обозначены скорости всех тел в указанные моменты времени.

На временном интервале (t_1, t_2) будем рассматривать две системы тел: «первый человек + первая тележка» и «второй человек + вторая тележка». Поскольку человек прыгнул в направлении, перпендикулярном движению тележки, то после отрыва от тележки проекция его скорости на ось X (совпадающую с направлением

движения первой тележки; см. рис. 3.4) равна скорости тележки после его прыжка.

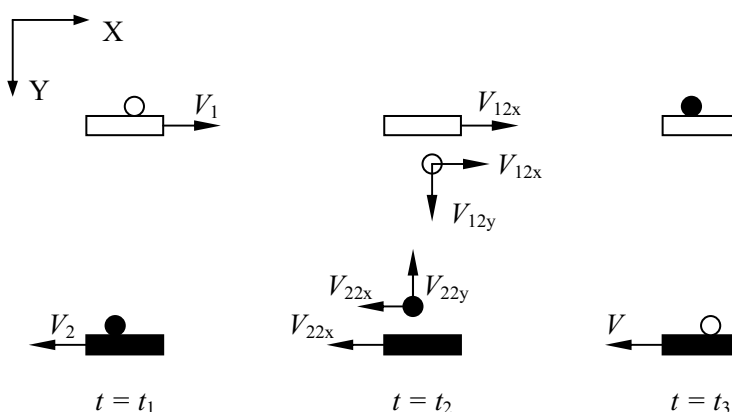


Рис. 3.4

На временном интервале (t_2, t_3) также рассмотрим две системы тел: «первый человек + вторая тележка», «второй человек + первая тележка».

Поскольку все внешние по отношению к рассматриваемым системам тел силы (силы тяжести и силы реакции рельсов) направлены перпендикулярно направлению оси X , то эти системы тел замкнуты в направлении данной оси, и для них выполняется закон сохранения проекции импульса на соответствующих им временных интервалах.

II. Запишем законы сохранения проекции импульса для выбранных систем тел и выбранных временных интервалов.

Система тел «первый человек + первая тележка, временной интервал (t_1, t_2) »:

$$(M + m)V_1 = MV_{12x} + mV_{12x}. \quad (3.46)$$

Из уравнения (3.46) следует, что скорость тележки после прыжка человека не изменится:

$$V_{12x} = V_1. \quad (3.47)$$

Аналогичный вывод можно сделать и для второй тележки, рассматривая тот же временной интервал и систему тел «второй человек + вторая тележка»:

$$V_{22x} = V_2. \quad (3.48)$$

Система тел «второй человек + первая тележка, временной интервал (t_2, t_3) :

$$MV_1 - mV_2 = 0. \quad (3.49)$$

В (3.49) учтено, что первая тележка остановилась после приземления второго человека.

Для системы тел «первый человек + вторая тележка» и того же временного интервала имеем:

$$mV_1 - MV_2 = -(m + M)V. \quad (3.50)$$

III. Решая систему уравнений (3.49) – (3.50), находим искомые модули скоростей тележек в начальный момент времени:

$$V_1 = V \frac{m}{M - m}, \quad V_2 = V \frac{M}{M - m}. \quad (3.51)$$

Проанализируем полученное решение. Если массы тележек разные, то (3.51) дает однозначный ответ на вопрос задачи. В случае, когда $M = m$ обе тележки останавливаются ($V = 0$). При этом начальные скорости тележек могут быть любыми по величине, но равными друг другу: $V_1 = V_2$.

Задача 3.3

(Движение тел с переменной массой)

По двум горизонтальным рельсам движутся с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с без трения (по инерции) две одинаковые тележки массой $M_0 = 100$ кг каждая. В некоторый момент времени $t_0 = 0$ на обе тележки сверху непрерывной струйкой начинает сыпаться песок так, что масса сыплющегося песка растет линейно по закону $m = kt$, где $k = 10$ кг/с. В первой тележке есть устройство для непрерывного выброса всего сыпанного на нее песка в направлении, перпендикулярном скорости тележки. Из второй тележки песок не выбрасывается. Как будут зависеть от времени скорость и перемещение каждой тележки? За какое время каждая тележка пройдет расстояние $L = 9$ м?

Решение

I. В соответствии с общей схемой решения задач на законы сохранения рассмотрим особенности процессов для обеих тележек. В обоих случаях система тел «тележка + сыпающийся на нее за время dt песок» является замкнутой в направлении движения те-

лежки, следовательно, можно использовать закон сохранения проекции импульса. Выберем системы координат так, как показано на рис. 3.5.

II. Закон сохранения проекции импульса на ось X для системы тел «тележка + сыпавшийся на нее за время dt песок» и интервала времени $[t, t + dt]$ в обоих случаях имеет вид:

$$M(t)v(t) + dm \cdot 0 = (M(t) + dm)(v(t) + dv). \quad (3.52)$$

Здесь $M(t)$ и $v(t)$ – мгновенные значения массы и скорости тележки в момент времени t ; dm – приращение массы тележки за малый промежуток времени dt , dv – приращение скорости тележки.

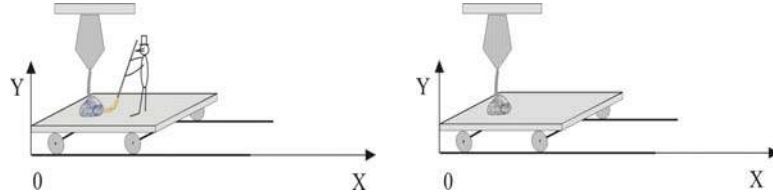


Рис. 3.5

Из условия задачи следует, что

$$dm = k dt. \quad (3.53)$$

Аналогично тому, как это было сделано в теоретическом введении при рассмотрении движения тел с переменной массой, пренебрежем в (3.52) членами второго порядка малости:

$$0 = M(t)dv(t) + v(t)dm. \quad (3.54)$$

Следовательно:

$$\frac{dv}{v(t)} = -\frac{k dt}{M(t)}. \quad (3.55)$$

Далее рассмотрим движение каждой тележки в отдельности.

Тележка №1. В соответствии с условием задачи масса первой тележки не меняется со временем ($M(t) = M_0$), поэтому, интегрируя (3.55), получим:

$$\ln \frac{v_1}{v_0} = -\frac{k}{M_0} t. \quad (3.56)$$

Таким образом, зависимость скорости первой тележки от времени имеет вид:

$$v_1(t) = v_0 e^{-\frac{k}{M_0}t}. \quad (3.57)$$

Закон движения первой тележки получаем, интегрируя (3.57):

$$x_1(t) = \int_0^t v_1(t) dt = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{M_0}t} dt = \frac{M_0 v_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{M_0}t} \right). \quad (3.58)$$

Воспользовавшись законом движения (3.58), находим время, за которое первая тележка пройдет расстояние $L = 9$ м:

$$t_1 = \frac{M_0}{k} \ln \frac{1}{1 - \frac{Lk}{M_0 v_0}} \cong 23,0 \text{ с.} \quad (3.59)$$

Тележка 2. В соответствии с условием задачи для массы второй тележки можно записать:

$$M(t) = M_0 + kt, \quad (3.60)$$

и уравнение (3.55) принимает вид:

$$\frac{dv_2}{v_2(t)} = -\frac{k dt}{M_0 + kt}. \quad (3.61)$$

После интегрирования (3.61) получаем:

$$\ln \frac{v_2}{v_0} = \ln \frac{M_0}{M_0 + kt}. \quad (3.62)$$

Зависимость скорости второй тележки от времени имеет вид:

$$v_2 = v_0 \frac{M_0}{M_0 + kt}. \quad (3.63)$$

Используя (3.63) находим закон движения второй тележки:

$$x_2 = \int_0^t v_2(t) dt = \int_0^t \frac{M_0 v_0}{M_0 + kt} dt = \frac{M_0 v_0}{k} \ln \left(1 + \frac{kt}{M_0} \right). \quad (3.64)$$

Воспользовавшись законом движения (3.64), находим время, за которое вторая тележка пройдет расстояние $L = 9$ м:

$$t_2 = \frac{M_0}{k} \left(e^{\frac{Lk}{M_0 v_0}} - 1 \right) \cong 14,6 \text{ с.} \quad (3.65)$$

III. Проанализируем полученное решение. Масса второй тележки увеличивается со временем, поэтому при падении на нее очередной порции песка ее скорость уменьшается медленнее, чем

скорость первой тележки. Графики зависимостей координат тележек от времени показаны на рис. 3.6.

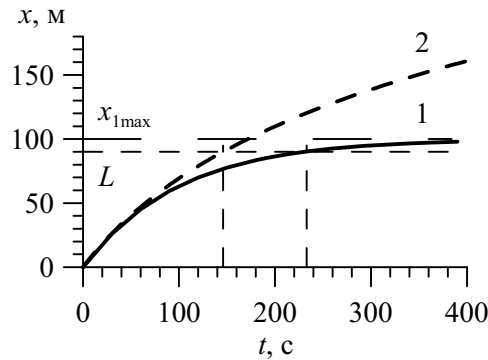


Рис. 3.6

В соответствии с (3.58) координата первой тележки асимптотически стремится к значению $x_{1\max} = \frac{M_0 v_0}{k} = 10$ м. Скорость второй тележки также уменьшается со временем, однако ее координата будет все время увеличиваться.

Задача 3.4

(Движение тел с переменной массой)

Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте с помощью жидкостного ракетного двигателя. Начальная масса ракеты (с топливом) равна $M_0 = 10^5$ кг, а скорость выбрасываемых вертикально вниз газов равна $u = 2600$ м/с. Найти расход топлива $\mu(t)$ и массу выброшенных ракетой газов в первую секунду полета.

Решение

I. Выберем систему координат, связанную с поверхностью Земли, ось X которой направим вертикально вверх. Для анализа условия равновесия будем использовать закон изменения импульса для системы тел «ракета + вылетевшие из нее газы». На эту систему тел действует внешняя сила — сила тяжести.

II. Закон изменения проекции импульса (см. (3.7)) ракеты запишем в виде

$$M(t) \cdot 0 - dm \cdot u = -M(t)g dt. \quad (3.66)$$

Здесь $M(t)$ — масса ракеты в момент времени t ;

$$dm = \mu(t)dt - \quad (3.67)$$

изменение массы ракеты за малый промежуток времени dt .

Дополним это уравнение условием сохранения суммарной массы ракеты и вылетающего газа:

$$dM + dm = 0. \quad (3.68)$$

III. Решим полученную систему уравнений (3.66) – (3.68) относительно расхода топлива $\mu(t)$.

Исключая из системы уравнений массу ракеты M и массу истекающих из нее газов m , получаем дифференциальное уравнение относительно $\mu(t)$:

$$d\mu(t) \frac{u}{g} = -\mu(t)dt. \quad (3.69)$$

Решаем (3.69) методом разделения переменных:

$$\ln \mu(t) = -\frac{g}{u}t + \text{const}, \quad (3.70)$$

$$\mu(t) = Ae^{-\frac{g}{u}t}. \quad (3.71)$$

Константу интегрирования A в (3.73) определяем из уравнения (3.66), записанного для начального момента времени:

$$A = \mu(0) = \frac{M_0 g}{u}. \quad (3.72)$$

В результате получаем искомое выражение для расхода топлива:

$$\mu(t) = \frac{M_0 g}{u} e^{-\frac{g}{u}t}. \quad (3.73)$$

Массу газов, выброшенных ракетой за время t , находим в результате интегрирования $\mu(t)$ по времени:

$$m(t) = \int_0^t \mu(t)dt = M_0 \left(1 - e^{-\frac{g}{u}t} \right). \quad (3.74)$$

При $t \ll \frac{u}{g}$ масса выбрасываемых газов оказывается пропорциональна времени их истечения:

$$m(t) \cong M_0 \frac{g}{u} t. \quad (3.75)$$

Поскольку по условию задачи $\frac{u}{g} \cong \frac{2600}{9,8} \text{ с} \cong 260 \text{ с}$, воспользуемся выражением (3.75) для нахождения искомой массы выброшенных ракетой газов в первую секунду полета:

$$m(t)|_{t=1 \text{ с}} \cong M_0 \frac{g}{u} t \Big|_{t=1 \text{ с}} \cong 384.6 \text{ кг.} \quad (3.76)$$

Задача 3.5

(Закон изменения механической энергии)

Два шарика с одинаковой массой m , соединенные нерастянутой пружинкой длиной l_0 , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать постоянная сила F , направленная вдоль оси пружинки. Через некоторое время длина пружинки становится максимальной и равной $l_{\max}$. Определить коэффициент упругости пружинки k .

Решение

Приложим силу F к переднему по направлению действия силы шарiku (см. рис. 3.7), поскольку в соответствии с условием задачи в результате действия силы происходит растяжение пружинки.

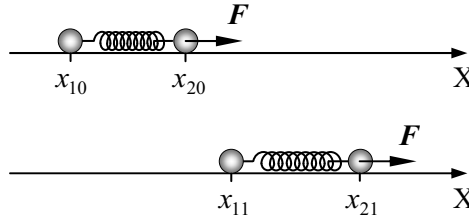


Рис. 3.7

Выберем систему координат, связанную с горизонтальной поверхностью, направив ось X вдоль направления действия силы, и обозначим координаты шариков x_{10} , x_{20} в начальный момент времени и x_{11} , x_{21} в момент максимального сжатия пружины (как показано на рис. 3.7). В этом случае длина нерастянутой пружинки в исходном состоянии $l_0 = x_{20} - x_{10}$, а ее длина в момент максимального растяжения $l_{\max} = x_{21} - x_{11}$.

Движение тел системы, состоящей из двух связанных пружинкой шариков, под действием внешней силы F из-за изменяю-

щихся во времени внутренних упругих сил будет достаточно сложным. Однако в момент времени, когда расстояние между шариками максимально и равно $l_{\max}$, скорости их будут равны, что существенно упрощает решение задачи. В соответствии с условием задачи пренебрежем силами трения и сопротивления воздуха, массой пружинки и размерами шариков. Воспользуемся законом изменения механической энергии и теоремой о движении центра масс для выбранной системы тел (см. п. 3.1).

II. Закон изменения механической энергии (3.39) для системы «два шарика + пружинка» на интервале времени от начала действия силы до момента максимального растяжения пружинки имеет вид:

$$\Delta(E^k + E^p) = 2 \frac{m v^2}{2} + \frac{k(l_{\max} - l_0)^2}{2} = A, \quad (3.77)$$

где v – скорость шариков в момент максимального растяжения пружины, а работа внешней силы равна

$$A = F(x_{21} - x_{20}). \quad (3.78)$$

Запишем уравнение движения центра масс (3.6) для рассматриваемой системы «два шарика + пружинка»:

$$2ma_{\text{цм}} = F. \quad (3.79)$$

Поскольку центр масс системы движется равноускоренно с ускорением $a_{\text{цм}}$, изменение координаты центра масс будет равно

$$\frac{x_{11} + x_{21}}{2} - \frac{x_{10} + x_{20}}{2} = \frac{v_{\text{цм}}^2}{2a_{\text{цм}}}, \quad (3.80)$$

где $v_{\text{цм}} = v$ – скорость центра масс в момент максимального растяжения пружины.

III. Подставляя (3.79) в (3.80), выражаем квадрат скорости центра масс через координаты шариков:

$$v_{\text{цм}}^2 = \frac{F}{m} \left(\frac{x_{11} + x_{21}}{2} - \frac{x_{10} + x_{20}}{2} \right). \quad (3.81)$$

Решая систему уравнений (3.77), (3.78) и (3.81), получаем искомый коэффициент упругости пружинки:

$$k = \frac{F}{(x_{21} - x_{11}) - (x_{20} - x_{10})} = \frac{F}{l_{\max} - l_0}. \quad (3.82)$$

Заметим, что, если приложить силу F к заднему по отношению к ее направлению шарiku, то в процессе движения тел системы длина пружинки в некоторый момент времени станет минимальной $l_{\min}$, при этом коэффициент упругости пружинки определяется соотношением $k = \frac{F}{l_0 - l_{\min}}$.

Эту задачу можно решить и в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы «два шарика + пружинка» (см. решение задачи 4.1 в главе 4).

Задача 3.6

(Закон изменения механической энергии)

По гладкой внутренней поверхности полусферической чаши радиусом R из верхней ее точки начинает соскальзывать небольшая шайба. Чаша движется с постоянной скоростью v_0 так, как показано на рис. 3.8. Определить скорость шайбы в тот момент, когда она будет в нижней точке своей траектории.

Решение

I. Задачу можно решать либо в лабораторной системе отсчета, либо в системе отсчета, движущейся вместе с чашей.

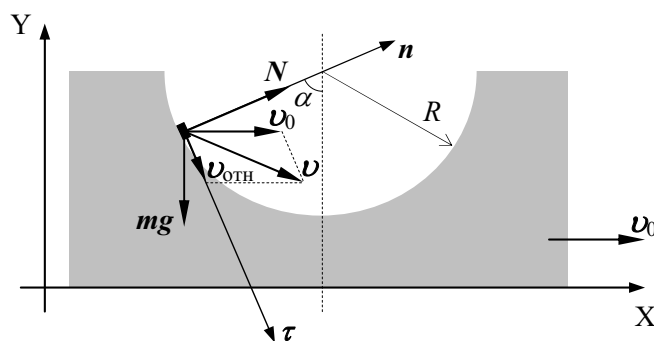


Рис. 3.8

Особенностью решения задачи в лабораторной системе является то, что работа силы нормальной реакции опоры N , действующей на шайбу, не равна нулю. Поэтому представляется интересным решить задачу в лабораторной системе отсчета.

Выберем оси системы координат так, как показано на рис. 3.8. Будем использовать закон изменения механической энергии шайбы за время от начала движения до момента времени, когда она будет в нижней точке своей траектории.

II. Запишем закон изменения механической энергии шайбы (см. (3.39)) в следующем виде:

$$(E_2^p + E_2^k) - (E_1^p + E_1^k) = A, \quad (3.83)$$

где $E_2^p - E_1^p = -mgR$ и $E_2^k - E_1^k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ – изменение потенциальной и кинетической энергии шайбы за рассматриваемый интервал времени в лабораторной системе отсчета, A – работа внешних сил. В данном случае внешней является сила нормальной реакции N , действующая со стороны чаши на шайбу. Для работы этой силы за малый промежуток времени dt можно записать:

$$\delta A = N \cdot v dt. \quad (3.84)$$

Поскольку сила не меняется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, то для определения силы N воспользуемся теперь системой отсчета, связанной с чашей. Для этого запишем уравнение движения шайбы относительно этой системы в проекциях на нормальную n и тангенциальную τ оси (рис. 3.8):

$$m \frac{v_{\text{отн}}^2}{R} = N - mg \cos \alpha, \quad (3.85)$$

$$m \frac{dv_{\text{отн}}}{dt} = mg \sin \alpha, \quad (3.86)$$

где m – масса шайбы, $v_{\text{отн}}$ – модуль скорости шайбы относительно чаши, α – угол между осью n и вертикалью.

В системе отсчета, связанной с чашей, шайба движется по окружности радиуса R , следовательно, можно записать (рис. 3.8):

$$v_{\text{отн}} = -R \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.87)$$

В соответствии с принципом суперпозиции движений (см. формулу (1.26) в главе 1,) скорость шайбы относительно лабораторной системы отсчета равна:

$$v = v_0 + v_{\text{отн}}. \quad (3.88)$$

III. Система уравнений (3.83) – (3.88) позволяет определить все кинематические характеристики движения шайбы. Сначала с помощью уравнений (3.85) – (3.88) преобразуем (3.84):

$$\delta A = -3m v_0 \sqrt{\frac{gR \cos \alpha}{2}} \sin \alpha d\alpha. \quad (3.89)$$

Находим работу A силы нормальной реакции опоры в лабораторной системе отсчета на интервале времени от начала движения до момента нахождения шайбы в нижней точке своей траектории, интегрируя (3.89) по α в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до 0:

$$A = m\sqrt{2gR}v_0. \quad (3.90)$$

С использованием полученного выражения (3.90) для работы A , закон изменения механической энергии (3.83) принимает вид:

$$-mgR + \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = m\sqrt{2gR}v_0. \quad (3.91)$$

В результате решения (3.91) относительно модуля скорости шайбы в нижней точке траектории получим:

$$v = v_0 + \sqrt{2gR}. \quad (3.92)$$

Существенно проще можно решить задачу, используя закон сохранения механической энергии (3.40) шайбы в инерциальной системе, связанной с движущейся чашей, поскольку в этой системе отсчета работа силы нормальной реакции N равна нулю:

$$\frac{mv_{\text{отн}}^2}{2} - mgR = 0. \quad (3.93)$$

Следовательно, модуль скорости относительного движения шайбы в момент прохождения нижней точки траектории равен

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{2gR}. \quad (3.94)$$

Используя принцип суперпозиции движений (см. (3.88)), сразу получаем искомое значение скорости движения шайбы:

$$v = v_0 + v_{\text{отн}} = v_0 + \sqrt{2gR}, \quad (3.95)$$

которое естественно совпадает с полученным ранее решением (3.92).

Как видим, сопоставление двух приведенных вариантов решения задачи еще раз показывает, насколько важным является разумный выбор системы отсчета.

Задача 3.7

(Законы сохранения импульса и механической энергии.)

В некоторый момент времени два шарика массами m_1 и m_2 , удаленные от всех остальных тел, находятся на расстоянии l_0 друг от друга и имеют скорости v_1 и v_2 , направленные вдоль линии, соединяющей центры шаров так, как показано на рис. 3.9.

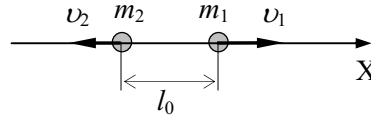


Рис. 3.9

Найти наибольшее расстояние $l_{\max}$ между шариками в процессе их движения.

Решение

I. Поскольку рассматриваемая система тел изолирована, удобно решать задачу в системе отсчета, связанной с центром масс, которая является инерциальной. В этой системе отсчета тела под действием сил гравитационного взаимодействия $F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}$ движутся по прямой, при этом на максимальном расстоянии друг от друга $l = l_{\max}$ скорости тел одновременно обращаются в ноль. Положительное направление оси X системы координат выберем совпадающим с направлением движения первого тела в начальный момент времени.

II. Запишем закон сохранения проекции импульса (3.13) системы двух тел для начального (соответствующего рис. 3.9) и конечного (соответствующего максимальному удалению частиц) моментов времени в системе центра масс, используя принцип суперпозиции движений:

$$0 - (m_1(v_1 - v_{\text{цм}}) + m_2(v_2 - v_{\text{цм}})) = 0, \quad (3.96)$$

где v_1 , v_2 и $v_{\text{цм}}$ – проекции скоростей шариков и их центра масс на ось X .

Закон сохранения механической энергии (3.40) для рассматриваемой системы и выбранного интервала времени имеет вид:

$$\Delta E^k + \Delta E^p = 0, \quad (3.97)$$

где

$$\Delta E^k = 0 - \left(\frac{m_1(v_1 - v_{\text{цм}})^2}{2} + \frac{m_2(v_2 - v_{\text{цм}})^2}{2} \right), \quad (3.98)$$

а изменение потенциальной энергии запишем с учетом выражения для работы парных центральных сил (см. п. 3.1) гравитационного взаимодействия равно

$$\Delta E^p = \int_{l_0}^{l_{\text{max}}} G \frac{m_1 m_2}{l^2} dl = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_{\text{max}}} \right). \quad (3.99)$$

III. Решая записанную систему уравнений (3.96) – (3.99), находим искомое расстояние между телами l_{max} в момент их максимального удаления:

$$l_{\text{max}} = \frac{l_0}{1 - \frac{l_0}{G} \cdot \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}}. \quad (3.100)$$

Поскольку наибольшее расстояние между шариками в процессе их движения $l_{\text{max}} > 0$, то полученное выражение (3.100) имеет смысл при

$$l_0 < G \frac{2(m_1 + m_2)}{(v_1 + v_2)^2}. \quad (3.101)$$

Иначе шарика разлетятся на бесконечно большое расстояние.

Задача 3.8

Две одинаковые гантели скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 так, как изображено на рис. 3.10. Расстояние между шариками каждой гантели – l . Как будут двигаться гантели после абсолютно упругого соударения?

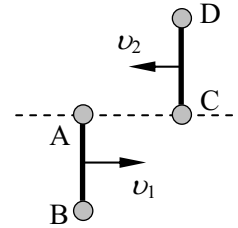


Рис. 3.10

Решение

I. Будем считать шарики А, В, С и D рассматриваемых гантелей (см. рис. 3.10) материальными точками, а стержни, соединяющие эти шарики, невесомыми и нерастяжимыми. Задачу решаем в

двух системах отсчета: лабораторной системе, ось X декартовой системы координат которой направим так, как показано на рис. 3.11, и системе, связанной с центром масс системы тел, состоящей из двух гантелей. Направление оси X' системы центра масс, изображенной на рис. 3.12, совпадает с направлением оси X .

По условию задачи гантели движутся по гладкой горизонтальной поверхности, следовательно, центр масс системы тел, состоящей из двух гантелей, движется с постоянной скоростью, и система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной.

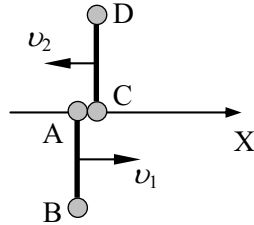


Рис. 3.11

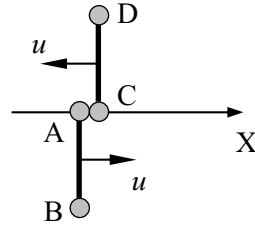


Рис. 3.12

Поскольку рассматриваемая система тел замкнута, а соударение абсолютно упругое, то выполняются законы сохранения механической энергии и импульса для этой системы в любой из выбранных систем отсчета.

II. В лабораторной системе отсчета гантели движутся поступательно со скоростями v_1 и v_2 , следовательно, скорость центра масс (см. Главу 3) равна

$$v_{\text{цм}} = \frac{v_1 - v_2}{2}, \quad (3.102)$$

а скорости шариков u_A , u_B , u_C и u_D в системе центра масс определяются выражениями:

$$u_{A,B} = v_1 - v_{\text{цм}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = u, \quad (3.103)$$

$$u_{C,D} = -v_2 - v_{\text{цм}} = -\frac{v_1 + v_2}{2} = -u. \quad (3.104)$$

Как видим, в системе центра масс гантели сближаются с равными по величине скоростями (см. рис. 3.12).

Силы, действующие на шарики A и C со стороны стержней в течение малого времени соударения, не изменяют их импульс и

кинетическую энергию на этом интервале времени. Запишем законы сохранения импульса и механической энергии для шариков А и С на интервале времени ("до соударения", "сразу после соударения") в системе центра масс:

$$mu_A + mu_C = mu'_A + mu'_C, \quad (3.105)$$

$$\frac{mu_A^2}{2} + \frac{mu_C^2}{2} = \frac{mu'^2_A}{2} + \frac{mu'^2_C}{2}, \quad (3.106)$$

где u'_A и u'_C – скорости шариков А и С сразу после соударения, m – масса каждого из шариков.

На указанном интервале времени скорости шариков В и D не изменяются и равны скоростям первоначального поступательного движения гантелей:

$$u'_B = u, \quad u'_D = -u. \quad (3.107)$$

III. Решим систему уравнений (3.103) – (3.106) относительно скоростей шариков А и С после соударения:

$$u'_A = -u, \quad u'_C = u. \quad (3.108)$$

На рис. 3.13 и рис. 3.14 изображены скорости шариков в системе центра масс до соударения и сразу после него в соответствии с (3.103), (3.104), (3.107) и (3.108).

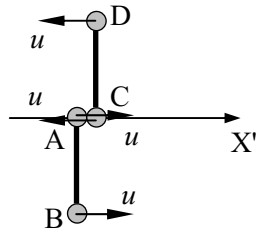


Рис. 3.13

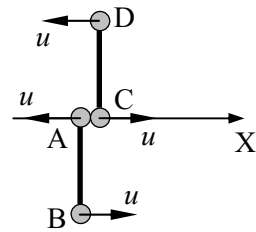


Рис. 3.14

Как видим, после соударения шарики А и С изменяют свои скорости на противоположные, в результате гантели начинают вращаться вокруг собственных центров масс, причем угловые скорости вращения гантелей совпадают. Через время половины оборота произойдет второе соударение гантелей (см. рис. 3.15).

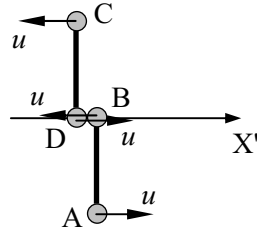


Рис. 3.15

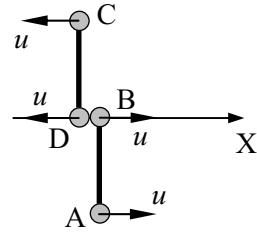


Рис. 3.16

Скорости u_D'' и u_B'' , приобретаемые шариками D и B после второго соударения гантелей, определяются уравнениями, аналогичными (3.105), (3.106), и становятся равными:

$$u_D'' = -u, \quad u_B'' = u. \quad (3.109)$$

Скорости шариков A и C не изменяются в результате второго соударения и равны скоростям первоначального поступательного движения гантелей (см. рис. 3.16):

$$u_A'' = u, \quad u_C'' = -u. \quad (3.110)$$

Как видим, скорости шариков каждой гантели становятся равными после второго соударения, следовательно, гантели начинают двигаться поступательно, сохраняя направление и величину скорости первоначального движения. Рис. 3.17 иллюстрирует последнее утверждение в системе отсчета, связанной с центром масс системы.

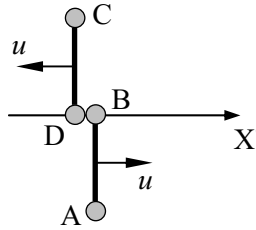


Рис. 3.17

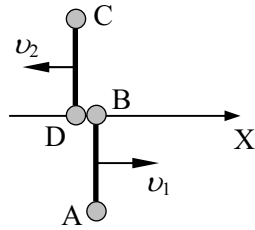


Рис. 3.18

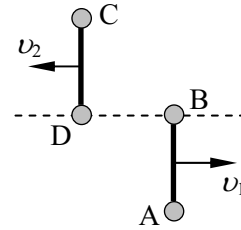


Рис. 3.19

В лабораторной системе отсчета скорости гантелей v_1'' и v_2'' после второго соударения равны:

$$v_1'' = u + v_{\text{цм}} = v_1, \quad (3.111)$$

$$v_2'' = -u + v_{\text{цм}} = -v_2. \quad (3.112)$$

Итак, две одинаковые гантели, скользящие по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 испытывают абсолютно упругое соударение, в результате которого каждая начинает вращаться вокруг собственного центра масс, причем угловые скорости вращения гантелей одинаковы и по величине, и по направлению. Через время, равное времени половины оборота гантелей, происходит второе соударение, после которого восстанавливается первоначальное поступательное движение гантелей со скоростями v_1 и v_2 (рис. 3.18 и 3.19).

Задача 3.9

(Абсолютно упругое столкновение)

Частица массой m_1 и импульсом p_1 налетает на вторую покоящуюся частицу массой m_2 и испытывает с ней абсолютно упругое столкновение. Найти импульсы p'_1 и p'_2 этих частиц после столкновения, в результате которого вторая частица отлетает под углом ϑ к первоначальному направлению движения налетающей частицы.

Решение

Выберем направление оси X лабораторной системы отсчета, совпадающим с направлением импульса налетающей частицы (см. рис. 3.20).

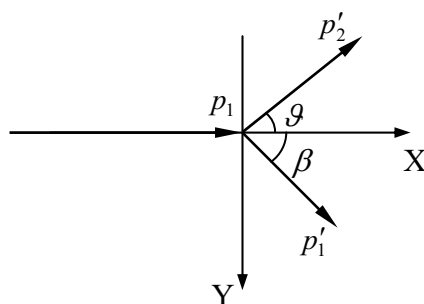


Рис. 3.20

Поскольку система рассматриваемых частиц является изолированной, и нет внутренних диссипативных сил, воспользуемся законами сохранения импульса (3.12) и механической энергии (3.40).

II. Запишем законы сохранения импульса и механической энергии на интервале времени ("до столкновения", "сразу после столкновения"):

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 = 0, \quad (3.113)$$

$$\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} - \frac{p_1^2}{2m_1} = 0. \quad (3.114)$$

Закон сохранения механической энергии (3.114) записан с учетом связи между импульсом материальной точки и ее кинетической энергией $E^k = \frac{p^2}{2m}$.

III. В результате решения системы уравнений (3.113) и (3.114) с учетом

$$(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2') = p_1 p_2' \cos \vartheta, \quad (3.115)$$

находим модули импульсов частиц после соударения:

$$p'_1 = p_1 \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \vartheta}, \quad (3.116)$$

$$p'_2 = \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} p_1 \cos \vartheta. \quad (3.117)$$

Для определения направления импульса первой частицы после соударения найдем угол β между ее импульсом и осью X (рис. 3.20). Для этого запишем закон сохранения импульса (3.113) в проекции на ось Y:

$$p'_1 \sin \beta - p'_2 \sin \vartheta = 0. \quad (3.119)$$

Из (3.119) с учетом (3.116) и (3.117) получим:

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin \left(\frac{p'_2}{p'_1} \sin \vartheta \right) = \\ &= \arcsin \left(\frac{m_2 \sin 2\vartheta}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \cos^2 \vartheta}} \right). \end{aligned} \quad (3.120)$$

Задача 3.10

В гладком вертикальном цилиндре под поршнем массой M прыгают вертикально, абсолютно упруго ударяясь о дно цилиндра и поршень, N легких маленьких шариков массой $m \ll M$ каждый.

Общая масса шариков равна массе поршня. Во сколько раз изменится расстояние между равновесным положением поршня и дном цилиндра, если массу поршня увеличить в два раза? Считать модули скоростей шариков у дна цилиндра одинаковыми.

Решение

I. Направим ось X декартовой системы координат, жестко связанной с цилиндром, вертикально вниз (см. рис. 3.21). Будем считать в соответствии с условием, что маленьких шариков настолько много, что дрожанием поршня в результате соударений с шариками можно пренебречь. Поскольку шарики малы, не будем учитывать соударения между ними.

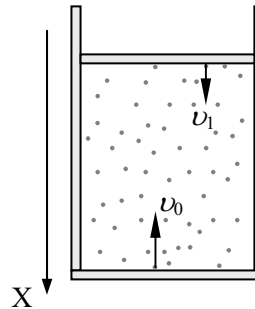


Рис. 3.21

II. Запишем закон сохранения механической энергии произвольного шарика на интервале времени между последовательными его соударениями с дном цилиндра и поршнем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.121)$$

где v_0 и v_1 – модули скоростей шарика у дна цилиндра и поверхности поршня соответственно, H – расстояние между дном цилиндра и поршнем.

В результате соударения с поршнем проекция импульса шарика на ось X изменяется на величину

$$\Delta p = 2mv_1. \quad (3.122)$$

За время t_0 между двумя последовательными ударами произвольного шарика о поршень произойдет N соударений всех шариков с поршнем. Изменение импульса механической системы, состоящей из N шариков, за время t_0 равно импульсу средней на данном интервале времени силы F , действующей на поршень со стороны шариков:

$$\Delta p N = Ft_0. \quad (3.123)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона запишем условие равновесия поршня:

$$Mg - F = 0. \quad (3.124)$$

Поскольку в поле сил тяжести Земли движение шариков происходит с постоянным ускорением g , модули скоростей произвольного шарика у дна цилиндра и поверхности поршня связаны соотношением:

$$v_0 = v_1 + g \frac{t_0}{2}. \quad (3.125)$$

III. Решим систему уравнений (3.121) – (3.125) относительно расстояния H между дном цилиндра и поршнем:

$$H = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{(mN + 2M)mN}{g(mN + M)^2}. \quad (3.126)$$

При увеличении массы поршня в два раза расстояние H_2 между дном цилиндра и поршнем, находящимся в новом равновесном состоянии, становится равным:

$$H_2 = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{(mN + 4M)mN}{g(mN + 2M)^2}. \quad (3.127)$$

Следовательно, при увеличении массы поршня расстояние между равновесным положением поршня и дном цилиндра изменится в k раз:

$$k = \frac{H_2}{H} = \frac{(mN + 4M)(mN + M)^2}{(mN + 2M)^3}. \quad (3.128)$$

Учитывая, что по условию задачи $mN = M$, окончательно получим:

$$k = \frac{20}{27}. \quad (3.129)$$

3.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Три лодки одинаковой массой m идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью v . Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы массой m_1 . Каковы будут скорости лодок после переброски грузов? Изменением импульса и механической энергии воды, а также силами трения пренебречь.

Ответ: $v_1 = v + \frac{m_1}{m + m_1}u$, $v_2 = v$, $v_3 = v - \frac{m_1}{m + m_1}u$.

Задача 2

На гладкой горизонтальной поверхности лежат два одинаковых шарика массами m_0 , соединенные невесомой пружинкой жесткостью k и длиной l_0 в недеформированном состоянии. В один из шариков попадает летящая горизонтально вдоль оси пружины со скоростью v пуля массой m и застревает в нем. Найти максимальное и минимальное расстояние между шариками в процессе их движения.

Ответ: $l_{\max} = l_0 + \Delta l$, $l_{\min} = l_0 - \Delta l$, где $\Delta l = vt \sqrt{\frac{m_0}{(m_0 + m)(2m_0 + m)k}}$.

Задача 3

С концов платформы массой M и длиной l , которая может перемещаться без трения, навстречу друг другу бегут два зайца массами m и $2m$ с постоянными относительно платформы скоростями. Второй заяц (массой $2m$) бежит в два раза быстрее первого. На сколько сместится платформа, когда второй заяц добежит до ее конца?

Ответ: $x = \frac{3m}{2(3m + M)}l$.

Задача 4

На нити, прикрепленной к воздушному шару массой M , свободно висящему в воздухе, сидит жук массой m , который начинает двигаться с постоянной относительно нити скоростью U вверх. Определить скорости шара и жука относительно Земли.

Ответ: $v_{\text{ш}} = -\frac{m}{m + M}U$, $v_{\text{ж}} = \frac{M}{m + M}U$.

Задача 5

На неподвижной тележке находятся два человека. В каком случае тележка приобретет большую скорость: если люди спрыгнут с тележки одновременно или друг за другом в одном направлении?

Ответ: тележка приобретет большую скорость, если люди спрыгнут друг за другом.

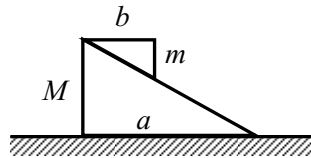
Задача 6

Три упругих шара одинакового радиуса с массами m_1 , m_2 и m_3 находятся на одной прямой. Двигаясь с некоторой скоростью, первый шар массой m_1 испытывает центральное соударение со вторым покоящимся шаром массой m_2 . Чему должна быть равна масса второго шара, чтобы после его соударения с третьим покоящимся шаром скорость последнего была максимальной?

Ответ: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

Задача 7

На горизонтальной поверхности лежит клин массой M с длиной основания a . Второй клин массой m и длиной основания $b < a$ начинает соскальзывать с поверхности нижнего клина из положения, изображенного на рисунке. На какое расстояние и в какую сторону переместится нижний клин к моменту касания верхним клином горизонтальной поверхности? Силами трения пренебречь.



Ответ: влево на $\Delta x = \frac{m}{m+M}(a-b)$.

Задача 8

Частица массой m испытала столкновение с покоящейся частицей массой M , в результате которого первая частица отклонилась на угол $\pi/2$, а вторая частица стала двигаться в направлении, составляющим угол $\alpha = 30^\circ$ с первоначальным направлением движения налетающей частицы. Как изменилась кинетическая энергия системы этих двух частиц после столкновения, если $M/m = 5$?

Ответ: $\frac{\Delta E^k}{E_0^k} = 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{m}{M} + \sin^2 \alpha \right] = \frac{2}{5}$.

Задача 9

Частица массой m_1 испытала абсолютно упругое центральное столкновение с покоящейся частицей массой m_2 . Определить относительное изменение кинетической энергии налетающей частицы.

Ответ: $\frac{\Delta E^k}{E_0^k} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$

Задача 10

Частица массой m_1 испытала абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей массой m_2 . Определить относительное изменение кинетической энергии налетающей частицы, если в результате столкновения она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения.

Ответ: $\frac{\Delta E^k}{E_0^k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$

Задача 11

После абсолютно упругого столкновения частицы массой m_1 с покоящейся частицей массой m_2 обе частицы разлетелись симметрично относительно направления первоначального движения первой частицы, и угол между их направлениями разлета $\alpha = 60^\circ$. Найти отношение масс этих частиц.

Ответ: $\frac{m_1}{m_2} = 2.$

Задача 12

При бомбардировке атомов гелия α -частицами с энергией $E_{\alpha 0} = 1 \text{ МэВ}$ найдено, что налетающая частица отклонилась на угол $\varphi = 60^\circ$ по отношению к первоначальному направлению полета. Считая удар абсолютно упругим, определить энергию атома гелия E_{He} и α -частицы E_α после соударения.

Ответ: $E_{\text{He}} = E_{\alpha 0} \sin^2 \varphi = 0,75 \text{ МэВ}, E_\alpha = E_{\alpha 0} \cos^2 \varphi = 0,25 \text{ МэВ}.$

ГЛАВА 4

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

4.1. Теоретический материал

Рассмотрим две системы отсчета S и S' , движущиеся произвольно друг относительно друга. Зададим движение системы отсчета S' относительно системы S зависимостями от времени радиус-вектора $\mathbf{R}(t)$ начала системы отсчета S' и угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}(t)$ системы S' вокруг своего начала отсчета (рис. 4.1).

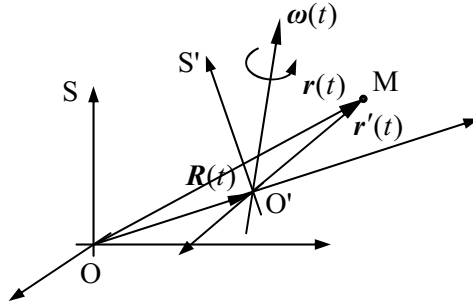


Рис. 4.1. Взаимная ориентация осей координат произвольно движущихся систем отсчета S и S' .

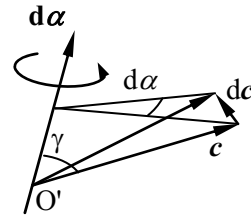


Рис. 4.2. Изменение произвольного вектора $\mathbf{c}$, жестко связанного с телом отсчета системы S' .

Физически бесконечно малый поворот системы отсчета S' (в том числе и тела отсчета) описывается вектором $d\boldsymbol{\alpha}$ (рис. 4.2). Направление этого вектора совпадает с осью поворота и согласно правилу буравчика задает направление поворота, а его модуль $d\alpha \equiv |d\boldsymbol{\alpha}|$ равен углу поворота.

Найдем скорость изменения произвольного вектора $\mathbf{c}$, жестко связанного с телом отсчета системы S' . В соответствии с рис. 4.2 модуль изменения вектора $\mathbf{c}$ равен:

$$|d\mathbf{c}| = d\alpha \cdot c \cdot \sin \gamma, \quad (4.1)$$

следовательно

$$d\mathbf{c} = [d\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{c}] \quad (4.2)$$

и

$$\dot{\mathbf{c}} = \left[\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \mathbf{c} \right] \equiv [\boldsymbol{\omega} \mathbf{c}], \quad (4.3)$$

где $\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}$ – **угловая скорость вращения**.

Запишем радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ произвольной материальной точки М относительно системы S через радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ начала системы отсчета S' относительно системы S и радиус-вектор $\mathbf{r}'(t)$ материальной точки М относительно системы S' (рис. 4.1):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t). \quad (4.4)$$

Продифференцируем обе части уравнения (4.4) по времени при постоянных ортах системы S. В соответствии с определением скорости и ускорения материальной точки (см. Главу 1), а также угловой скорости вращения системы отсчета, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}|_S &= \dot{\mathbf{R}}|_S + \dot{\mathbf{r}}'|_S = \mathbf{V} + \frac{\partial(x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')}{\partial t} \Big|_S = \\ &= \mathbf{V} + (\dot{x}'|_S \mathbf{i}' + \dot{y}'|_S \mathbf{j}' + \dot{z}'|_S \mathbf{k}') + \left(x' \frac{\partial \mathbf{i}'}{\partial t} \Big|_S + y' \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial t} \Big|_S + z' \frac{\partial \mathbf{k}'}{\partial t} \Big|_S \right) = \\ &= \mathbf{V} + \mathbf{v}' + (x'[\boldsymbol{\omega} \mathbf{i}'] + y'[\boldsymbol{\omega} \mathbf{j}'] + z'[\boldsymbol{\omega} \mathbf{k}']) = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}|_S &= \dot{\mathbf{V}}|_S + \dot{\mathbf{v}}'|_S + \frac{\partial[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']}{\partial t} \Big|_S = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{a}' + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}'] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']] = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь нижние индексы S и S' означают дифференцирование при постоянных ортах систем S и S' соответственно, $\mathbf{V}$ – скорость и $\mathbf{A}$ – ускорение начала отсчета системы S' относительно S.

В результате мы получили взаимосвязь (формулы сложения) радиус-векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$, скоростей $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{v}'(t)$, а также ускорений $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{a}'(t)$ материальной точки относительно двух произвольно движущихся относительно друг друга систем отсчета S и S':

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (4.7)$$

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']}_{\text{переносная}} + \underbrace{\mathbf{v}'}_{\text{относительная}} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}', \quad (4.8)$$

$$\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}']}_{\text{переносное}} + \underbrace{[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\text{центростремительное}} + \underbrace{2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']}_{\text{Кориолиса}} + \underbrace{\mathbf{a}'}_{\text{относительное}} =$$

$$= \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{Кор}} + \mathbf{a}' . \quad (4.9)$$

Здесь $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$ – **переносная** и $\mathbf{v}'$ – **относительная** скорости движения материальной точки; $\mathbf{a}_{\text{Кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']$ – **ускорение Кориолиса**, $\mathbf{a}_{\text{цс}} = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$ – **центростремительное**, $\mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$ – **переносное** и $\mathbf{a}'$ – **относительное** ускорения материальной точки.

Если материальная точка покоится относительно системы S' , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' , \quad (4.10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пер}} = \underbrace{\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']}_{\text{переносная}} , \quad (4.11)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{пер}} = \underbrace{\mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\substack{\text{центростремительное} \\ \text{переносное}}} \quad (4.12)$$

Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета

Пусть система отсчета S является инерциальной (см. Главу 2). Запишем уравнение движения материальной точки M , на которую действуют силы $\mathbf{F}_i$, относительно системы отсчета S – 2-ой закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i . \quad (4.13)$$

Подставим в уравнение (4.13) полученное выражение (4.9) для ускорения материальной точки относительно произвольно движущейся системы отсчета S' и несколько его преобразуем:

$$m\mathbf{A} + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] + 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + m\mathbf{a}' = \sum_i \mathbf{F}_i ,$$

$$m\mathbf{a}' = \sum_i \mathbf{F}_i - \underbrace{m\mathbf{A} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\substack{\text{переносная} \\ \text{центробежная}}} - \underbrace{2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']}_{\text{Кориолиса}} , \quad (4.14)$$

$$ma' = \sum_i F_i + F_{\text{пер}} + F_{\text{Кор}}. \quad (4.15)$$

В результате мы получили уравнение движения материальной точки относительно в общем случае неинерциальной системы отсчета S' . Как видим, в неинерциальной системе отсчета также можно использовать второй закон Ньютона, если к "материальным" силам, действующим на материальную точку со стороны материальных тел, добавить так называемые **силы инерции**:

переносную –

$$F_{\text{пер}} = -mA - m[\dot{\omega}r'] - \underbrace{m[\omega[\omega r']]}_{\text{центробежная}} = -mA - m[\dot{\omega}r'] + F_{\text{цб}}, \quad (4.16)$$

Кориолиса –

$$F_{\text{Кор}} = -2m[\omega v']. \quad (4.17)$$

Заметим, что силы инерции вызваны не взаимодействием материальных объектов, а выбором неинерциальной системы отсчета, относительно которой рассматривается движение тел. В отличие от "материальных" сил для сил инерции нельзя указать тела, со стороны которых они действуют, следовательно, к ним не применим третий закон Ньютона (см. Главу 2).

Переносная сила инерции связана как с ускоренным движением начала системы отсчета S' , так и с вращением этой системы относительно инерциальной системы отсчета. Сила Кориолиса возникает только при движении материальной точки относительно вращающейся неинерциальной системы отсчета S' .

Любую задачу можно решать как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчета, пользуясь либо уравнениями движения, либо законами сохранения (см. Главу 3). При этом необходимо учитывать силы инерции, их импульс и работу точно так же, как и для "материальных" сил – сил взаимодействия материальных объектов.

4.2. Основные типы задач и методы их решения

4.2.1. Классификация задач

Большинство задач на движение тел в неинерциальных системах отсчета можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на движение тел в:

- 1) поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета,
- 2) вращающейся неинерциальной системе отсчета.

4.2.2. Общая схема решения задач механики в неинерциальных системах отсчета с использованием законов Ньютона

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать неинерциальную систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы, в том числе и силы инерции, а также необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат выбранной неинерциальной системы отсчета для всех тел системы.
2. Использовать третий закон Ньютона для материальных сил, если это не было сделано ранее в п. 3.
3. Использовать законы, описывающие индивидуальные свойства сил.
4. Записать уравнения кинематической связи.
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечания.

В случае решения задач на динамику материальной точки в пп. I.3 – I.5 речь идет о характеристиках материальной точки, а п. II.2 надо опустить.

В случае решения задач на динамику простейших механических систем в пп. I.3 – II.2 речь идет о характеристиках и уравнениях движения тел и силах (в том числе силах инерции), действующих между телами рассматриваемой системы.

Пункты II.1 – II.4 можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от решаемой задачи.

4.3. Примеры решения задач

Задача 4.1

(Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета)

Два небольших шарика с одинаковой массой m , соединенные нерастянутой пружиной длиной l_0 , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать постоянная сила F , направленная вдоль оси пружинки (см. рис. 4.3).

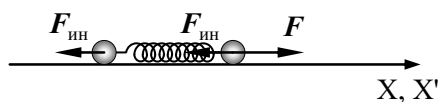


Рис. 4.3

Через некоторое время длина пружинки становится максимальной и равной $l_{\max}$. Определить коэффициент упругости пружинки k .

Решение

I. Приложим силу F к переднему по направлению действия силы шарiku (см. рис. 4.3), поскольку в соответствии с условием задачи в результате действия силы происходит растяжение пружинки. При решении задачи будем использовать две системы отсчета: лабораторную инерциальную систему, связанную с неподвижной поверхностью, по которой скользят рассматриваемые тела, и поступательно движущуюся неинерциальную систему отсчета, связанную с центром масс системы «два шарика + пружинка».

Направим ось X лабораторной системы отсчета и ось X' неинерциальной системы отсчета вдоль направления действия силы

F (рис. 4.3). В инерциальной системе отсчета система тел движется под действием одной внешней силы F . В неинерциальной системе к указанной силе добавляются две переносные силы инерции $F_{\text{пер}}$. Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Используя теорему о движении центра масс (см. (3.6) в Главе 3), найдем ускорение центра масс системы «два шарика + пружинка» в инерциальной системе отсчета:

$$a_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}. \quad (4.18)$$

Переносные силы инерции (4.16), действующие на каждый из шариков в неинерциальной системе отсчета, равны:

$$F_{\text{пер}} = -ma_{\text{цм}}. \quad (4.19)$$

Запишем закон изменения механической энергии системы «два шарика + пружинка» в неинерциальной системе отсчета на интервале времени от начала движения до момента максимального растяжения пружины (см. (3.39) в Главе 3):

$$\frac{k(l_{\text{max}} - l_0)^2}{2} = -F_{\text{пер}}\Delta x'_1 + (F - F_{\text{пер}})\Delta x'_2. \quad (4.20)$$

Здесь $F_{\text{пер}}$ – модуль силы инерции, $\Delta x'_1$ и $\Delta x'_2$ – изменения координат заднего и переднего шариков (по отношению к направлению действия силы) за указанный промежуток времени. Левая часть уравнения (4.20) представляет собой изменение потенциальной энергии упруго деформированной пружинки. В момент максимального растяжения пружинки относительная скорость шариков становится равной нулю, следовательно, в системе отсчета, связанной с центром масс, кинетическая энергия шариков обращается в ноль и ее изменение за указанный интервал времени также равно нулю. Правая часть уравнения (4.20) представляет собой суммарную работу постоянных внешних сил, действующих на тела системы (включая силы инерции).

III. Решая систему уравнений (4.18) – (4.20) с учетом $\Delta x_2 - \Delta x_1 = l_{\text{max}} - l_0$, получаем искомый коэффициент упругости пружинки:

$$k = \frac{F}{l_{\text{max}} - l_0}. \quad (4.21)$$

Решение этой же задачи в инерциальной системе отсчета, предложено в Главе 3 (задача 3.5).

Энергетический подход, реализованный нами при решении задач (3.5) и (4.1), не позволяет проанализировать характер движения тел системы. В нашем случае при движении шариков длина пружинки изменяется по гармоническому закону, периодически достигая своего максимального значения. Законы движения шариков и изменения длины связывающей их пружинки будут получены при решении задачи (8.11) в Главе 8.

Задача 4.2

(Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета)

Математический маятник длиной l и массой m подвешен к потолку кабины лифта, опускающегося вниз с ускорением $a \leq g$ (см. рис. 4.4).

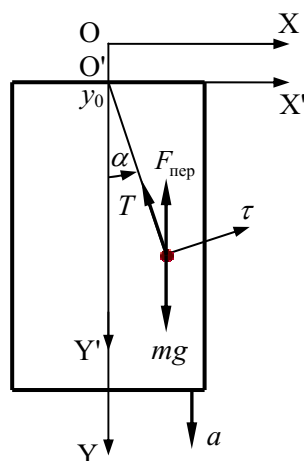


Рис. 4.4

Найти закон движения маятника относительно кабины лифта. Решить задачу в неинерциальной и инерциальной системах отсчета. Влиянием вращения Земли пренебречь.

Решение 1

I. В неинерциальной системе отсчета $X'O'Y'$, связанной с лифтом (рис. 4.4), на маятник действуют три силы: сила тяжести mg , сила натяжения нити T и переносная сила инерции

$F_{\text{пер}} = -ma$, направленная вверх. Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Уравнение движения тела массой m в проекции на тангенциальную к траектории ось τ относительно неинерциальной системы отсчета имеет вид:

$$ma_{\tau} = ma \sin \alpha - mg \sin \alpha, \quad (4.22)$$

где α – угол отклонения маятника от положения равновесия (рис. 4.4).

Тангенциальное и угловое ускорения связаны соотношением (см. (1.19) в Главе 1):

$$a_{\tau} = \dot{v} = \ddot{\alpha}l, \quad (4.23)$$

где v – модуль линейной скорости маятника.

III. Из уравнений (4.22) и (4.23) получаем уравнение движения маятника:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g-a}{l} \sin \alpha = 0. \quad (4.24)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно α легко решить в двух частных случаях: при малых углах отклонения маятника и при движении лифта с ускорением, равным по величине ускорению свободного падения – $a = g$.

При малых углах отклонения маятника $\sin \alpha \approx \alpha$ уравнение (4.24) сводится к уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad (4.25)$$

здесь $\omega = \sqrt{(g-a)/l}$ – круговая частота колебаний, которая определяется не только длиной маятника и ускорением свободного падения, но и ускорением лифта.

Нетрудно убедиться подстановкой, что решением уравнения (4.25) является гармоническая функция

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.26)$$

где амплитуда колебаний α_0 и начальная фаза φ_0 определяются начальными условиями.

В случае движения лифта с ускорением, равным по модулю ускорению свободного падения, уравнение (4.24) принимает вид

$$\ddot{\alpha} = 0. \quad (4.27)$$

Следовательно, движение маятника относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с лифтом, будет происходить с постоянной угловой скоростью $\dot{\alpha}$, значение которой задается начальными условиями. Закон движения в этом случае имеет вид:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \dot{\alpha}t, \quad (4.28)$$

где α_0 – начальное отклонение маятника.

Искомый закон движения маятника относительно кабины лифта в общем случае является решением уравнения (4.24), которое допускает аналитическое решение в двух рассмотренных нами частных случаях (см. (4.26) и (4.28)).

Решение 2

В инерциальной системе отсчета XOY (см. рис. 4.4) координаты математического маятника x, y связаны с его углом отклонения α в неинерциальной системе $X'O'Y'$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \alpha, \\ y &= y_0 + l \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где y_0 – координата начала отсчета O' системы $X'O'Y'$ относительно системы XOY .

Проекции ускорения маятника относительно инерциальной системы отсчета находим, дважды дифференцируя по времени соотношения (4.29):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + l\ddot{\alpha} \cos \alpha, \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_0 - l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - l\ddot{\alpha} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Уравнение движения маятника в проекциях на оси X и Y имеет вид (см. (2.2) в Главе 2):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T \sin \alpha, \\ m\ddot{y} &= mg - T \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Учитывая, что в соответствии с условием задачи лифт движется вниз с постоянным ускорением $\ddot{y}_0 = a$, получаем из уравнений (4.30) и (4.31) уравнение движения маятника относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g-a}{l} \sin \alpha = 0. \quad (4.32)$$

Как видим, уравнение (4.32) совпадает с уравнением (4.24), а следовательно решение задачи в инерциальной системе отсчета совпадает с решением (4.26) и (4.28) в неинерциальной системе.

Заметим, что оптимальным в данной задаче является выбор неинерциальной системы отсчета.

Задача 4.3

(Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета)

Небольшое тело поместили на вершину гладкого полуцилиндра радиусом R , находящегося на горизонтальной поверхности (см. рис. 4.5). Полуцилиндру сообщают постоянное горизонтальное ускорение $\dot{a}$, в результате чего тело начинает соскальзывать с поверхности полуцилиндра. Определить модуль скорости v_0 тела относительно полуцилиндра в момент отрыва и высоту H , на которой произойдет отрыв.

Решение

I. Задачу решаем в поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета, связанной с полуцилиндром. Относительно инерциальной системы отсчета ускорение неинерциальной системы равно a . На тело, находящееся на поверхности цилиндра действуют сила тяжести mg , сила нормальной реакции опоры N и переносная сила инерции $F_{\text{пер}} = -ma$, изображенные на рис. 4.5.

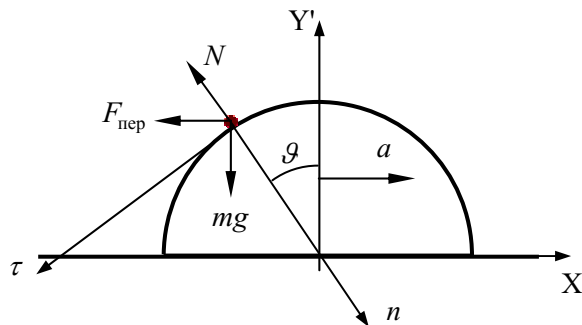


Рис. 4.5

Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем. Полуцилиндр считаем абсолютно твердым телом, а соскальзывающее с его поверхности тело – материальной точкой.

II. Уравнение движения тела относительно неинерциальной системы отсчета в проекциях на нормальную и тангенциальную к траектории оси имеет вид:

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \vartheta - N - ma \sin \vartheta, \quad (4.33)$$

$$m \dot{v} = mg \sin \vartheta + ma \cos \vartheta, \quad (4.34)$$

где v – модуль скорости тела относительно полуцилиндра, а ϑ – угол, задающий положение тела на поверхности полуцилиндра в любой момент времени до его отрыва (см. рис. 4.5).

В момент отрыва сила нормальной реакции, действующая на тело со стороны полуцилиндра, обращается в ноль:

$$N = 0. \quad (4.35)$$

Дополним систему уравнений (4.33) – (4.35) начальными условиями для угла ϑ и скорости тела v :

$$\vartheta(t=0) = 0, \quad v(t=0) = 0. \quad (4.36)$$

Получена полная система уравнений (4.33) – (4.36), позволяющая определить не только скорость тела, но и угол ϑ .

Заметим, что попытка прямого решения полученной системы уравнений относительно скорости v и угла ϑ приводит к громоздким преобразованиям. Решение задачи можно упростить, если воспользоваться законом изменения механической энергии. Изменение механической энергии тела на интервале времени от начала движения тела до момента его отрыва от поверхности полуцилиндра равно работе силы инерции (работа силы реакции опоры в выбранной неинерциальной системе отсчета равна нулю) на этом интервале:

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR(1 - \cos \vartheta_0) = \int_0^{\vartheta_0} ma \cos \vartheta R d\vartheta, \quad (4.37)$$

где v_0 , ϑ_0 – скорость и угол ϑ в момент отрыва тела от поверхности полуцилиндра.

III. Из уравнений (4.33), (4.35) и (4.37) получаем два соотношения для квадрата скорости:

$$v_0^2 = R(g \cos \vartheta_0 - a \sin \vartheta_0), \quad (4.38)$$

$$v_0^2 = 2R(g(1 - \cos \vartheta_0) + a \sin \vartheta_0). \quad (4.39)$$

Соотношение (4.39) перепишем в виде

$$\frac{v_0^2}{2} - Rg = -Rg \cos \vartheta_0 + Ra \sin \vartheta_0. \quad (4.40)$$

Сложение уравнений (4.38) и (4.40) позволяет легко получить скорость тела относительно полуцилиндра в момент отрыва:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} gR}. \quad (4.41)$$

Для угла ϑ_0 , при котором произойдет отрыв, из соотношений (4.38) и (4.41) получаем следующее выражение:

$$\cos \vartheta_0 = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2 + 9a^2}}{3(g^2 + a^2)}. \quad (4.42)$$

Искомая высота H , на которой тело оторвется от поверхности полуцилиндра, равна:

$$H = R \cos \vartheta_0 = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2 + 9a^2}}{3(g^2 + a^2)} R. \quad (4.43)$$

Нетрудно видеть, что при $a = 0$ выражение (4.43) дает значение высоты отрыва тела от неподвижного полуцилиндра $H = \frac{2}{3} R$.

Задача 4.4

(Вращающаяся неинерциальная система отсчета)

Горизонтальный диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (см. рис. 4.6).

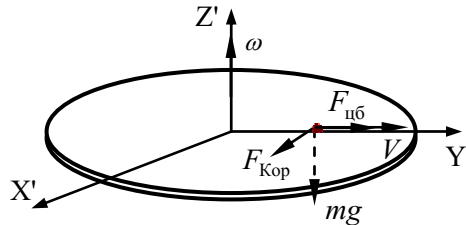


Рис. 4.6

По одному из диаметров диска в сторону от центра движется небольшое тело массой m с постоянной относительно диска скоростью V . Найти силу F , с которой диск действует на тело в момент времени, когда оно находится на расстоянии r от оси вращения.

Решение

I. Выберем неинерциальную систему отсчета $X'Y'Z'$, жестко связанную с вращающимся диском, при этом направим одну из осей системы координат Z' вдоль угловой скорости вращения диска ω , а другую Y' – вдоль скорости движения тела относительно диска V (рис. 4.6). В этой системе отсчета на тело действуют сила тяжести mg , сила реакции диска F (не изображенная на рисунке), переносная сила инерции, равная в данном случае центробежной силе инерции $F_{цб}$ (см. (4.16)) –

$$F_{цб} = -m[\omega[\omega r]], \quad (4.44)$$

и сила инерции Кориолиса (см. (4.17)) –

$$F_{Кор} = -2m[\omega V]. \quad (4.45)$$

Силой сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Под действием рассмотренных выше сил тело движется в соответствии с условием задачи с постоянной относительно диска скоростью. Запишем уравнение движения тела в векторной форме в выбранной нами неинерциальной системе отсчета:

$$0 = mg + F_{Кор} + F_{цб} + F. \quad (4.46)$$

Уравнение движения (4.46) в проекциях на оси координат системы $X'Y'Z'$, указанные на рис. 4.6, имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= F_{x'} + F_{Кор}, \\ 0 &= F_{y'} + F_{цб}, \\ 0 &= F_{z'} - mg. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Как видим, сила реакции диска имеет отличные от нуля проекции на все координатные оси.

III. Подставляя в (4.47) выражения для центробежной силы инерции (4.44) и силы Кориолиса (4.45), получаем выражения для искомых проекций на оси координат системы $X'Y'Z'$ силы реакции диска:

$$\begin{aligned}
 F_{x'} &= -2m\omega V, \\
 F_{y'} &= -m\omega^2 r, \\
 F_{z'} &= mg.
 \end{aligned}
 \tag{4.48}$$

При этом модуль силы реакции диска F равен

$$F = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}, \tag{4.49}$$

а направляющие косинусы силы $\mathbf{F}$ относительно системы отсчета $X'Y'Z'$, жестко связанной с диском, равны:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha' &= -\frac{2m\omega V}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}}, \\
 \cos \beta' &= -\frac{m\omega^2 r}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}}, \\
 \cos \gamma' &= \frac{mg}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

Задача 4.5

(Вращающаяся неинерциальная система отсчета)

Винтовку с оптическим прицелом навели на вертикальную черту мишени, находящуюся точно в северном направлении, и выстрелили. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить на какое расстояние и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен вдоль поверхности Земли на широте $\varphi = 60^\circ$ (см. рис. 4.7), начальная скорость пули $V = 900$ м/с, расстояние до мишени $s = 1$ км.

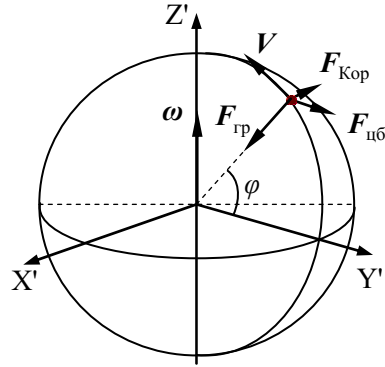


Рис. 4.7

Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета $X'Y'Z'$, жестко связанной с Землей, при этом направим одну из осей системы координат Z' вдоль угловой скорости вращения Земли ω , а

другую – в меридиональной плоскости, в которой лежит вектор начальной скорости пули V (рис. 4.7). Будем считать, что поверхность Земли является сферической, и Земля вместе со связанной с ней системой отсчета $X'Y'Z'$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где $T = 24$ ч.

На пулю в процессе полета действуют сила гравитационного взаимодействия с Землей $F_{\text{гр}}$ и силы инерции – центробежная сила инерции $F_{\text{цб}}$ и сила инерции Кориолиса $F_{\text{Кор}}$, изображенные на рис. 4.7 в соответствии с (4.16) и (4.17). Отклонение пули от вертикальной черты мишени вызывает сила инерции Кориолиса.

Центробежная сила инерции имеет горизонтальную составляющую, и, следовательно, изменяет горизонтальную проекцию скорости пули. Однако учет центробежной силы инерции даст малые поправки к величине и направлению скорости полета пули.

Сила инерции Кориолиса не меняя величины скорости пули, изменяет направление ее полета. При этом проекция скорости полета пули на направление выстрела практически не меняется. Поэтому будем считать, что в первом приближении движение в горизонтальном направлении происходит с постоянной скоростью, равной начальной скорости пули.

II. Время полета пули t находим из условия равномерного движения в направлении выстрела:

$$t = \frac{s}{V}. \quad (4.51)$$

Ускорение в восточном направлении, перпендикулярном начальной скорости пули, определяется силой инерции Кориолиса (см. рис. 4.7) и равно

$$a = 2\omega V \sin \varphi. \quad (4.52)$$

Отклонение пули от вертикальной черты мишени при ускоренном движении в течение времени τ равно

$$l = \frac{at^2}{2}. \quad (4.53)$$

III. Решая полученную систему уравнений (4.51) – (4.53), находим искомое значение отклонения пули от вертикальной черты мишени:

$$l = \frac{\omega s^2 \sin \varphi}{V} \approx 7 \text{ см.} \quad (4.54)$$

Оценим изменение горизонтальной проекции скорости пули ΔV_τ под действием горизонтальной составляющей центробежной силы инерции $F_{цб}^\tau$. Запишем уравнение движения пули в проекции на тангенциальную ось (см. рис. 4.8):

$$ma_\tau = F_{цб}^\tau. \quad (4.55)$$

Используя (4.16) и (4.55), получаем для горизонтальной проекции ускорения пули:

$$\begin{aligned} a_\tau &= -\omega^2 r \sin \varphi = \\ &= -\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Изменение горизонтальной проекции скорости пули под действием центробежной силы инерции с учетом (4.51) равно:

$$\Delta V_\tau \cong a_\tau t = -\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi \frac{s}{V}. \quad (4.57)$$

Подстановка численных значений заданных в условии задачи величин в (4.57) дает $\Delta V_\tau \cong -0,01 \text{ м/с} \ll V = 900 \text{ м/с}$, что подтверждает справедливость принятого допущения.

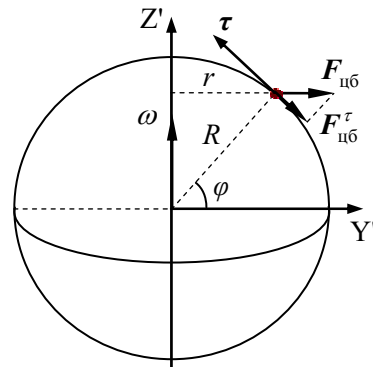


Рис. 4.8

Задача 4.6

(Вращающаяся неинерциальная система отсчета)

Вращение Земли вызывает отклонение поверхности воды в реках от горизонтального положения. Определить, у какого берега и на какую величину h уровень воды в реке будет выше. Река течет в северном полушарии на широте $\varphi = 60^\circ$ с севера на юг. Ширина реки $L = 1 \text{ км}$, скорость течения $V = 1 \text{ м/с}$, период обращения Земли вокруг своей оси $T = 24 \text{ ч}$. Считать ускорение свободного падения на данной широте равным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Решение

I. Выделим мысленно небольшой объем жидкости вблизи поверхности и рассмотрим его движение в неинерциальной системе отсчета, связанной с Землей. Направим ось Y вертикально вверх (вдоль линии отвеса), а ось X – горизонтально, перпендикулярно скорости течения реки в сторону правого берега (на запад).

На рис. 4.9 изображены силы, действующие на элемент объема жидкости – сила тяжести mg , равнодействующая сил давления со стороны всей остальной воды N и сила инерции Кориолиса $F_{\text{Кор}}$.

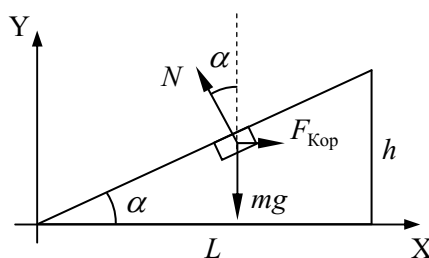


Рис. 4.9

Жидкость считаем несжимаемой, сил вязкого трения нет. Направление течения реки направлено за плоскость чертежа. Равнодействующая сил давления направлена перпендикулярно поверхности жидкости и образует угол α с вертикалью.

II. Жидкость движется в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, следовательно, векторная сумма сил, лежащих в плоскости чертежа и изображенных на рисунке, равна нулю:

$$mg + N + F_{\text{Кор}} = 0. \quad (4.58)$$

Уравнение (4.58) в проекциях на оси выбранной системы координат принимает вид:

$$-N \sin \alpha + F_{\text{Кор}} = 0, \quad (4.59)$$

$$N \cos \alpha - mg = 0.$$

Разность высот правого и левого берегов реки, как видно на рис. 4.9, равна

$$h = L \tan \alpha. \quad (4.60)$$

Для силы инерции Кориолиса (см. (4.17)) в данном случае справедливо выражение:

$$F_{\text{кор}} = 2m\omega V \sin \varphi. \quad (4.61)$$

III. Решая систему уравнений (4.59) – (4.61), получаем, что уровень воды у правого берега будет выше на величину

$$h = \frac{2\omega V L \sin \varphi}{g}. \quad (4.62)$$

Подстановка численных значений заданных в условии задачи величин в (4.62) дает искомое значение разности высот правого и левого берегов $h \cong 1.3 \text{ см}$.

Задача 4.7

(Вращающаяся неинерциальная система отсчета)

Тонкий однородный стержень длиной L и массой m , шарнирно закрепленный в верхней точке O , вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через данную точку (см. рис. 4.10). Определить угол устойчивого вращения стержня.

Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной со стержнем и вертикальной осью вращения. Будем считать стержень абсолютно твердым телом. На стержень действуют три силы: сила тяжести mg , сила реакции со стороны шарнира и центробежная сила инерции. Силой сопротивления воздуха пренебрегаем. Под действием силы тяжести и силы реакции со стороны шарнира стержень совершает вращательное движение относительно лабораторной инерциальной системы отсчета, причем различные участки стержня движутся по окружностям разных радиусов. Следовательно, различна и сила инерции $dF_{\text{ин}}$, действующая на отдельные элементы стержня в неинерциальной системе отсчета.

II. При устойчивом вращении стержень отклонен от вертикальной оси на постоянный угол α . Поскольку стержень по-

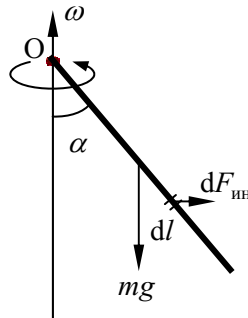


Рис. 4.10

коится в выбранной неинерциальной системе отсчета, сумма моментов всех сил, действующих на стержень в этой системе, относительно горизонтальной оси, проходящей через точку О перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 4.10) и направленной из плоскости чертежа, равна нулю:

$$M_{mg} + M_{ин} = 0. \quad (4.63)$$

При записи (4.63) учтено, что момент силы реакции шарнира относительно указанной оси равен нулю.

Запишем выражение для момента силы тяжести:

$$M_{mg} = -mg \frac{L}{2} \sin \alpha. \quad (4.64)$$

Для нахождения суммарного момента сил инерции рассмотрим элемент стержня длиной dl , находящийся на расстоянии l от точки О. Центробежная сила инерции (см. (4.16)), действующая на этот элемент, равна

$$dF_{ин} = \rho S dl \omega^2 r, \quad (4.65)$$

где ρ – плотность стержня, S – площадь его поперечного сечения, r – расстояние от элемента стержня до оси вращения.

Момент силы инерции относительно горизонтальной оси можно записать в виде:

$$dM_{ин} = dF_{ин} l \cos \alpha = \rho S dl \omega^2 l \sin \alpha l \cos \alpha. \quad (4.66)$$

Суммарный момент сил инерции равен

$$\begin{aligned} M_{ин} &= \int dM_{ин} = \rho S \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^L l^2 dl = \\ &= \frac{1}{3} L^2 \omega^2 m \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.67)$$

III. Решая полученную систему уравнений (4.63), (4.64) и (4.67) относительно угла α , получаем:

$$\cos \alpha = \frac{3g}{2L\omega^2}, \quad (4.68)$$

$$\sin \alpha = 0. \quad (4.69)$$

Нетрудно видеть, что при $\omega > \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ значение угла

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3g}{2L\omega^2}\right) \quad (4.70)$$

соответствует устойчивому вращению стержня, а значение $\alpha = 0$, которое следует из уравнения (4.69), соответствует неустойчивому вращению стержня. В случае $\omega \leq \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ устойчивым является вертикальное положение стержня ($\alpha = 0$).

Задача 4.8

(Вращающаяся неинерциальная система отсчета)

Гладкая горизонтальная трубка длиной L равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов (см. рис. 4.11).

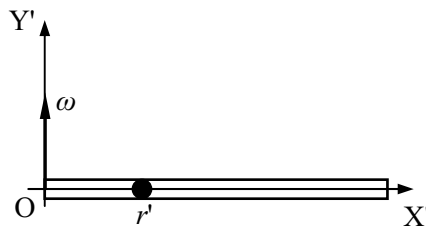


Рис. 4.11

Определить, за какое время t_0 маленький шарик, находящийся на расстоянии l от оси трубки, достигнет ее конца, а также модуль скорости шарика относительно земли v_0 в момент его вылета из трубки. Начальную скорость шарика относительно трубки принять равной нулю.

Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с трубкой и вертикальной осью вращения. Оси X' и Y' правой системы координат $X'Y'Z'$ направим вдоль трубки и угловой скорости ее вращения соответственно (см. рис. 4.11). Шарик считаем материальной точкой, а трубку – абсолютно твердым телом. На шарик в процессе движения действуют четыре силы: сила тяжести mg , сила реакции трубки, центробежная сила инерции, а также сила инерции Кориолиса. Силами трения и сопротивления воздуха пре-

небрегаем. Шарик движется вдоль трубки, причем его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета определяется только центробежной силой инерции, поскольку направление действия остальных сил перпендикулярно его движению.

II. Запишем уравнение движения шарика относительно выбранной неинерциальной системы отсчета в проекции на ось, совпадающую с геометрической осью трубки (см. рис. 4.11):

$$ma' = m\omega^2 r'. \quad (4.71)$$

С целью упрощения дальнейшего интегрирования уравнения (4.71) выразим проекцию ускорения шарика a' через производную проекции скорости по пространственной координате r' шарика:

$$a' = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{dr'} \cdot \frac{dr'}{dt} = \frac{dv'}{dr'} v'. \quad (4.72)$$

III. Используя соотношение (4.72), исключаем проекцию ускорения из уравнения движения шарика (4.71):

$$v' \frac{dv'}{dr'} = \omega^2 r'. \quad (4.73)$$

Полученное уравнение (4.73) решаем методом разделения переменных:

$$\int_0^{v'} v' dv' = \int_l^{r'} \omega^2 r' dr'. \quad (4.74)$$

Интегрируя (4.74), получаем связь проекции скорости шарика v' и его координаты r' :

$$v' = \omega \sqrt{r'^2 - l^2}. \quad (4.75)$$

Следовательно

$$\frac{dr'}{dt} = \omega \sqrt{r'^2 - l^2}. \quad (4.76)$$

Уравнение (4.76) решаем методом разделения переменных:

$$\int_l^L \frac{dr'}{\sqrt{r'^2 - l^2}} = \int_0^{t_0} \omega dt. \quad (4.77)$$

В результате интегрирования уравнения (4.77) находим искомое время движения шарика в трубке:

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{L}{l} + \sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1} \right). \quad (4.78)$$

Для нахождения скорости шарика относительно трубки воспользуемся (4.75):

$$\mathbf{v}' = \omega \sqrt{r'^2 - l^2} \cdot \mathbf{e}_{X'}, \quad (4.79)$$

где $\mathbf{e}_{X'}$ – единичный вектор вдоль оси X' .

Скорость шарика относительно лабораторной инерциальной системы отсчета в соответствии с (4.8) может быть записана в виде:

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}'] + \mathbf{v}' = -\omega r' \mathbf{e}_{Z'} + \omega \sqrt{r'^2 - l^2} \cdot \mathbf{e}_{X'}, \quad (4.80)$$

где $\mathbf{e}_{Z'}$ – единичный вектор вдоль оси Z' . Следовательно, искомый модуль скорости шарика относительно лабораторной системы отсчета равен:

$$v = \omega \sqrt{2r'^2 - l^2}. \quad (4.81)$$

Задача 4.9¹

(Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета)

Однородный цилиндр массой m скатывается без проскальзывания с клина массой M и углом при основании α , стоящего на гладкой горизонтальной поверхности. Найти ускорение клина.

Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с клином, оси которой X' и Y' направим вдоль горизонтальной и вертикальной поверхностей клина соответственно (см. рис. 4.12 и 4.13).

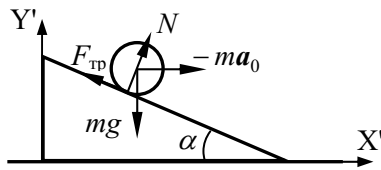


Рис. 4.12

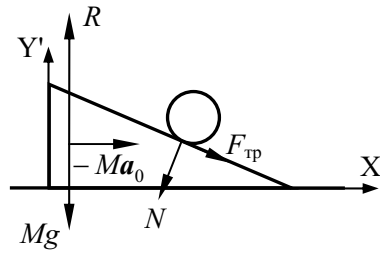


Рис. 4.13

На цилиндр действуют четыре силы: сила тяжести mg , сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ (качение происходит без проскальзывания) и сила

¹ Задачи 4.9 и 4.10, а также задачу 2 для самостоятельного решения рекомендуем решать после ознакомления с содержанием Главы 6.

нормальной реакции N со стороны клина, а также переносная сила инерции $-ma_0$ (рис. 4.12), обусловленная движением клина относительно лабораторной инерциальной системы отсчета с ускорением a_0 , направленным в отрицательном направлении оси X' . Силой сопротивления воздуха пренебрегаем.

На клин действуют: сила тяжести Mg , силы нормального давления N и трения покоя $F_{\text{тр}}$ со стороны цилиндра, сила нормальной реакции опоры R и переносная сила инерции $-Ma_0$ (рис. 4.13).

II. Запишем уравнение движения центра масс цилиндра в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$ma_{x'} = N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha + ma_0, \quad (4.82)$$

$$ma_{y'} = N \cos \alpha + F_{\text{тр}} \sin \alpha - mg, \quad (4.83)$$

где $a_{x'}$, $a_{y'}$ – проекции ускорения a центра масс цилиндра, для которых можно записать:

$$a_{x'} = a \cos \alpha, \quad a_{y'} = -a \sin \alpha. \quad (4.84)$$

Уравнение вращательного движения (см. (6.30) в Главе 6) цилиндра относительно оси, совпадающей с его осью и направленной за плоскость чертежа (см. рис. 4.12), имеет вид:

$$\frac{mr^2}{2} \ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} r, \quad (4.85)$$

где $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение цилиндра, r – его радиус. При записи (4.85) учтено известное выражение для момента инерции J цилиндра относительно оси, совпадающей с осью цилиндра – $J = \frac{mr^2}{2}$, а

также равенство нулю моментов сил инерции, нормальной реакции и тяжести относительно указанной оси.

Из условия качения без проскальзывания получаем уравнение связи ускорения оси цилиндра (совпадающего с ускорением центра масс a) с его угловым ускорением:

$$a = \ddot{\varphi} r. \quad (4.86)$$

Запишем также уравнение движения клина в проекции на ось X' :

$$0 = -N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha + Ma_0. \quad (4.87)$$

III. Решая совместно уравнения (4.82) – (4.87), получаем выражение для модуля ускорения клина:

$$a_0 = \frac{mg \sin 2\alpha}{3M + m(1 + 2\sin^2 \alpha)}. \quad (4.88)$$

Следовательно, искомое ускорение клина относительно лабораторной инерциальной системы отсчета равно:

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{mg \sin 2\alpha}{3M + m(1 + 2\sin^2 \alpha)} \mathbf{e}_x, \quad (4.89)$$

где $\mathbf{e}_x$ – единичный вектор лабораторной инерциальной системы отсчета, совпадающий с направлением оси X' неинерциальной системы отсчета.

Задача 4.10

(Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета)

Цилиндр массой m и радиусом R находится на расстоянии L от правого края доски. Доска начинает двигаться с ускорением a влево (рис. 4.14), при этом цилиндр катится по доске без проскальзывания. С какой скоростью $V_{\text{цм}}$ относительно доски будет двигаться центр масс цилиндра в тот момент, когда он будет находиться над краем доски?

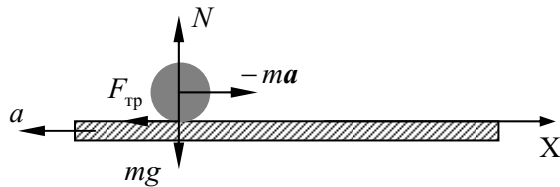


Рис. 4.14

Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с доской. Направим ось X' системы координат противоположно ускорению доски. На цилиндр в процессе движения действуют четыре силы: сила тяжести mg , сила нормальной реакции опоры N , сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ (проскальзывания при качении нет) и переносная сила инерции $-ma$. Силой сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Запишем уравнение движения центра масс цилиндра в проекции на ось X' :

$$m\ddot{x}' = ma - F_{\text{тр}}. \quad (4.90)$$

Уравнение вращательного движения (см. (6.30) в Главе 6) цилиндра относительно оси, совпадающей с его осью и направленной за плоскость чертежа (см. рис. 4.14), имеет вид:

$$J\ddot{\phi} = F_{\text{тр}}R, \quad (4.91)$$

где $\ddot{\phi}$ – угловое ускорение цилиндра, R – его радиус. Момент инерции цилиндра J относительно указанной оси равен

$$J = \frac{mR^2}{2} \quad (4.92)$$

Из условия качения без проскальзывания получаем уравнение связи ускорения оси цилиндра (совпадающего с ускорением центра масс $\ddot{x}'$) с его угловым ускорением:

$$\ddot{x}' = \ddot{\phi}R. \quad (4.93)$$

Запишем также кинематические соотношения при равноускоренном движении центра масс цилиндра относительно неинерциальной системы отсчета:

$$V_{\text{цм}} = x't. \quad (4.94)$$

$$L = \frac{\ddot{x}'t^2}{2}, \quad (4.95)$$

При записи последних соотношений учтено, что движение начинается с нулевой начальной скоростью.

III. Решая совместно уравнения (4.90) – (4.93), получаем выражение для ускорения центра масс цилиндра:

$$\ddot{x}' = \frac{2}{3}a. \quad (4.96)$$

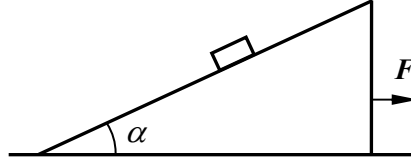
Искомую скорость центра масс цилиндра в момент времени, когда он будет находиться над краем доски, получим из (4.94) – (4.96):

$$V_{\text{цм}} = \sqrt{\frac{4}{3}aL}. \quad (4.97)$$

4.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

С какой горизонтальной силой F следует двигать клин с углом α при основании и массой M , чтобы лежащий на нем брусок массой m не перемещался относительно клина? Сила F направлена так, как показано на рисунке.

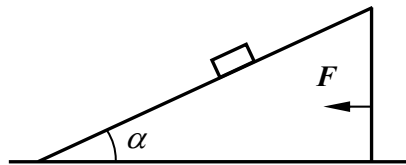


Коэффициент трения скольжения между бруском и клином равен μ .

Ответ: $F \leq (M + m)g \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$ при $\mu > \operatorname{tg} \alpha$, а при $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$ проскальзывание будет при любом значении модуля силы F .

Задача 2

С какой горизонтальной силой F следует двигать клин с углом α при основании и массой M , чтобы лежащий на нем брусок массой m не перемещался относительно клина? Сила F направлена так, как показано на рисунке.



Коэффициент трения скольжения между бруском и клином равен μ .

Ответ:

$$(M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \leq F \leq (M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} \text{ при } \mu < \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$(M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \leq F \leq \infty \text{ при } \mu \geq \operatorname{ctg} \alpha.$$

Задача 3

Сплошной цилиндр скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом α к горизонту. Наклонная плоскость опускается в лифте с ускорением a_0 . Определить ускорение оси цилиндра относительно наклонной плоскости.

Ответ: $a = \frac{2}{3}(g - a_0) \sin \alpha$.

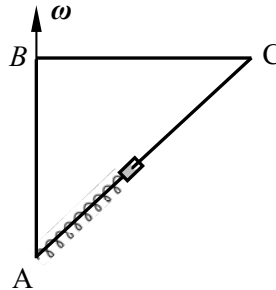
Задача 4

Горизонтальный диск радиуса R вращают с угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его край. По краю диска равномерно относительно него движется частица массой m . В момент времени, когда она оказывается на максимальном расстоянии от оси вращения, сумма всех сил инерции $F_{\text{ин}}$, действующих на частицу в системе отсчета, связанной с диском, обращается в ноль. Найти зависимость модуля силы $F_{\text{ин}}$ от расстояния r от частицы до оси вращения.

Ответ: $F_{\text{ин}} = m\omega^2 r \sqrt{\left(\frac{2R}{r}\right)^2 - 1}$.

Задача 5

Жесткие стержни образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, который вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального катета АВ (см. рис.). По стержню АС скользит без трения муфта массой m , связанная пружиной жесткостью k с вершиной А треугольника. Длина нерастянутой пружины l . Определить при каком значении модуля угловой скорости ω муфта будет в равновесии при недеформированной пружине? Будет ли это равновесие устойчивым?



Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}}$, равновесие устойчиво, если $kl > \frac{mg}{\sqrt{2}}$.

Задача 6

Из ружья произведен выстрел вверх (параллельно линии отвеса). Географическая широта места $\varphi = 60^\circ$, начальная скорость пули $V_0 = 100$ м/с. Определить насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля.

Ответ: пуля отклонится к западу на расстояние

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_0^3 \omega \cos \varphi}{g^2} \approx 0,5 \text{ м.}$$

Задача 7

Поезд массой m движется вдоль меридиана на северной широте φ со скоростью V . Определить величину и направление силы бокового давления поезда на рельсы.

Ответ: $F = 2mV\omega \sin \varphi$ (на правый по ходу поезда рельс).

Задача 8

На экваторе на рельсах стоит пушка. Рельсы направлены с запада на восток, и пушка может двигаться по ним без трения. Пушка стреляет вертикально вверх. Какую скорость будет иметь пушка после выстрела? Масса пушки M , масса снаряда m , длина ствола l . Считать, что в стволе снаряд движется с постоянным ускорением a .

Ответ: $V = \frac{2ml\omega_0}{M+m}$, ω_0 – угловая скорость вращения Земли.

Задача 9

Под каким углом к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Начальная скорость пули $V_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: ствол ружья надо наклонить к востоку под углом

$$\alpha = \frac{2V_0\omega \cos \varphi}{3g} \approx 51''.$$

Задача 10

На экваторе с высоты H на поверхность Земли падает тело с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая силой сопротивления воздуха, определить в какую сторону и на какое расстояние отклонится тело при падении от вертикали. Угловую скорость вращения Земли ω считать заданной.

Ответ: Отклонится на восток на расстояние $x \approx \frac{2}{3} \omega H \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Задача 11

Поезд массой m движется вдоль экватора с постоянной скоростью v . Определить силу N нормального давления поезда на рельсы. Решить задачу в двух неинерциальных системах отсчета: в системе, связанной с поверхностью Земли, и в системе, связанной с поездом. Радиус Земли R и ее угловую скорость вращения ω считать заданными.

Ответ: $N = m \left(g - \frac{(\omega R \pm v)^2}{R} \right)$.

ГЛАВА 5

КИНЕМАТИКА В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5.1. Теоретический материал

5.1.1. Постулаты и основные понятия (специальной) теории относительности

I. Принцип относительности: любое физическое явление в природе протекает **одинаковым образом** во **всех** инерциальных системах отсчета. Следовательно, **любой** закон природы **одинаково формулируется** во **всех** инерциальных системах отсчета (уравнения, описывающие законы природы в различных инерциальных системах отсчета, имеют один и тот же вид).

II. Принцип постоянства скорости света: скорость распространения электромагнитных волн (в том числе света) в вакууме **одинакова** во всех инерциальных системах отсчета и **не зависит** от скоростей движения источника и приемника излучения.

Событие

Любое **событие**, произошедшее в некоторой точке пространства, определяется пространственными координатами (x, y, z) этой точки и моментом времени t , когда оно произошло.

Пространственно-временные координаты события – (x, y, z, t) или $(\mathbf{r}, t)$.

Синхронизация часов в системе отсчета

Для того чтобы часы, неподвижно расположенные во всех точках системы отсчета S , показывали одно и то же время с точки зрения наблюдателя, неподвижного в той же системе отсчета, необходимо их синхронизовать. В этом случае можно говорить о едином времени в системе отсчета.

Условие синхронизации часов A и B , расположенных в произвольных точках системы отсчета S (в предположении об изотропности пространства):

$$t^B = \frac{t_1^A + t_2^A}{2}. \quad (5.1)$$

Здесь (см. рис. 5.1) t_1^A – момент времени излучения из точки А светового сигнала (кванта света) по часам в точке А, t^B – момент времени регистрации этого сигнала в точке В по часам в точке В, t_2^A – момент времени регистрации в точке А отраженного в точке В сигнала по часам в точке А.

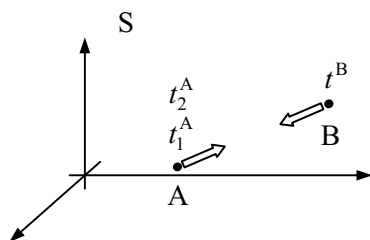


Рис. 5.1. Синхронизация часов, расположенных в разных точках инерциальной системы отсчета S

5.1.2. Преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца – это **взаимосвязь** пространственно-временных координат **одного и того же** события относительно различных инерциальных систем отсчета (см. рис. 5.2).

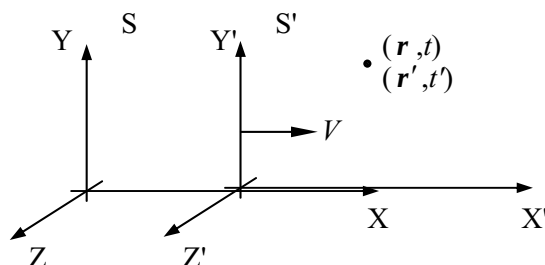


Рис. 5.2. Взаимная ориентация осей координат движущихся относительно друг друга инерциальных систем отсчета и пространственно-временные координаты события

Пусть система отсчета S' движется относительно системы S с постоянной скоростью V вдоль оси X (рис. 5.2). При этом **оси систем ориентированы** в пространстве одинаково и **часы синхронизованы** так, что событие с пространственно-временными координатами $(\mathbf{r} = 0, t = 0)$ в системе S имеет координаты $(\mathbf{r}' = 0, t' = 0)$ в системе S' . Тогда в соответствии с постулатами теории относитель-

ности и из однородности времени, а также однородности и изотропности пространства пространственно-временные координаты любого события (x, y, z, t) и (x', y', z', t') в этих системах отсчета связаны преобразованиями Лоренца:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; \end{array} \right. \quad (5.2)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - Vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right); \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + Vt'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Здесь $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1$ – **Лоренц-фактор** $\left(\beta \equiv \frac{V}{c} < 1\right)$.

В силу линейности преобразований Лоренца (5.3) аналогичные соотношения можно записать и для интервалов пространственных координат $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$ и $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta y' = y'_2 - y'_1$, $\Delta z' = z'_2 - z'_1$, а также интервалов времени $\Delta t = t_2 - t_1$ и $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ между двумя любыми событиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t), \\ \Delta y' = \Delta y, \\ \Delta z' = \Delta z, \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right); \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \gamma(\Delta x' + V\Delta t'), \\ \Delta y = \Delta y', \\ \Delta z = \Delta z', \\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Заметим, что величины интервалов пространственных координат и времени зависят от выбора системы отсчета.

5.1.3. Следствия преобразований Лоренца

1. Предельная скорость распространения взаимодействий

Скорость распространения любых взаимодействий (а значит и скорость движения физических объектов) в природе **не превышает** скорость распространения электромагнитных волн (в том числе света) в вакууме.

2. "Относительность одновременности"

События, происходящие одновременно в одной инерциальной системе отсчета и имеющие различные пространственные координаты вдоль направления движения другой инерциальной системы, не являются в ней одновременными.

Это утверждение непосредственно следует из (5.4).

3. "Замедление времени"

Рассмотрим два события, происходящие в одной и той же точке пространства в движущейся системе S' (например последовательное "тиканье" часов системы S') (рис. 5.3).

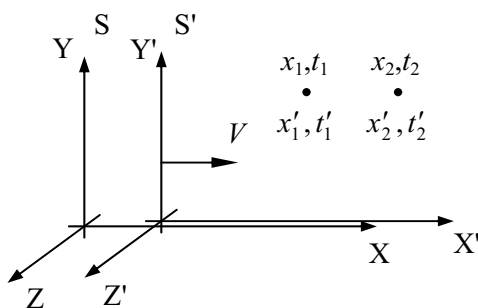


Рис. 5.3. Взаимная ориентация осей координат движущихся относительно друг друга инерциальных систем отсчета и пространственно-временные координаты рассматриваемых событий

Принципиально важно, что эти два события происходят **в одной и той же точке пространства** в системе S' : $x'_1 = x'_2$, $\Delta x' = x'_1 - x'_2 = 0$. Для системы S эти события будут происходить в разных точках пространства. В этом случае (см. (5.4)):

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma \Delta t' \quad \text{или} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}. \quad (5.5)$$

Здесь $\Delta t'$ – интервал времени между событиями, происходящими в одной и той же точке пространства в системе S' , по часам системы S' , Δt – интервал времени между теми же событиями по часам системы S .

Другими словами, для системы отсчета, в которой события происходят в одной точке пространства, наблюдается сокращение интервала времени между этими событиями (по сравнению с любой другой системой отсчета).

Если $T_0 \equiv \Delta t'$ – период хода движущихся часов (часов системы S') по часам системы S' , а $T \equiv \Delta t$ – период хода движущихся часов по часам системы S , то можно утверждать, что движущиеся часы идут медленнее неподвижных часов:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma T_0, \quad T_0 = \frac{T}{\gamma}. \quad (5.6)$$

4. "Сокращение длины"

Рассмотрим два события, происходящие одновременно относительно некоторой системы отсчета S . Этими событиями могут быть, например, измерения координат правого x_2 и левого x_1 концов движущейся вместе с системой S' линейки, расположенной вдоль осей X и X' (см. рис. 5.4).

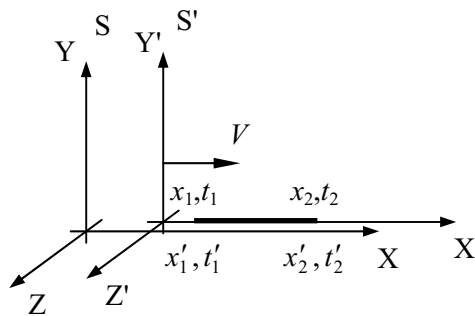


Рис. 5.4. Взаимная ориентация осей координат движущихся относительно друг друга инерциальных систем отсчета и пространственно-временные координаты рассматриваемых событий

Принципиально важно, что эти два события происходят **одновременно** в системе S: $t_1 = t_2$, $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$. Для системы S' эти события будут происходить не одновременно. В соответствии с (5.4) для пространственных интервалов $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ можно записать:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma \Delta x \quad \text{или} \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}. \quad (5.7)$$

Другими словами, для системы отсчета, в которой события происходят **одновременно**, наблюдается **сокращение пространственного интервала** между этими событиями (по сравнению с любой другой системой отсчета) вдоль направления относительного движения систем.

Если событиями являются измерения координат линейки (см. рис. 5.4), то:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma l \quad \text{или} \quad l = \frac{l_0}{\gamma}. \quad (5.8)$$

Здесь $l_0 \equiv |\Delta x'|$ – **собственная длина** линейки (длина линейки в неподвижной относительно линейки системе отсчета S', при этом измерение координат концов линейки может происходить в разные моменты времени); $l \equiv |\Delta x|$ – длина линейки в системе отсчета S, относительно которой линейка движется со скоростью V (измерение координат концов линейки должно происходить в один и тот же момент времени).

5.1.4. Пространственно-временной интервал

Пространственно-временной интервал между двумя событиями:

$$\begin{aligned} S_{12} &\equiv \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} = \\ &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь $r_{12} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \geq 0$ – **пространственный интервал** (расстояние между точками пространства, в которых произошли

рассматриваемые события) и $t_{12} = |\Delta t| \geq 0$ – **временной интервал между событиями**.

Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (5.2), легко показать, что **пространственно-временной интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета**, то есть является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$S_{12} = S'_{12}. \quad (5.11)$$

Заметим, что при этом переходе пространственный r_{12} и временной t_{12} интервалы либо оба уменьшаются, либо оба увеличиваются.

Пространственноподобный интервал – вещественный пространственно-временной интервал между двумя событиями, для которого $S_{12}^2 > 0$. В этом случае: $r_{12} > ct_{12}$.

Свойства пространственноподобного интервала между двумя событиями

1. Существует такая инерциальная система отсчета, в которой события происходят одновременно, но в разных точках пространства. В этой системе отсчета пространственный интервал r'_{12} между событиями принимает минимальное значение:

$$S_{12} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = S'_{12} = r'_{12}, \quad (5.12)$$

$$r'_{12} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}. \quad (5.13)$$

2. Не существует системы отсчета, в которой события происходят в одной точке пространства.

3. События, связанные пространственноподобным интервалом, в результате перехода в другую систему отсчета могут происходить во времени в обратной последовательности.

4. Эти события не могут быть связаны причинно-следственной связью, поскольку для этого потребовалась бы скорость передачи сигнала, превышающая скорость света:

$$S_{12}^2 > 0, \quad r_{12} > ct_{12}, \quad v = \frac{r_{12}}{t_{12}} > c. \quad (5.14)$$

5. Эти события не могут происходить с одним и тем же телом (достаточно малым, чтобы считать, что события происходят в од-

ной и той же точке пространства относительно системы отсчета, связанной с этим телом), поскольку тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света.

Времениподобный интервал – мнимый пространственно-временной интервал между двумя событиями, для которого $S_{12}^2 < 0$. В этом случае: $r_{12} < ct_{12}$.

Свойства времениподобного интервала между двумя событиями

1. Существует такая инерциальная система отсчета, в которой оба события происходят в одной и той же точке пространства, но в разное время. В этой системе отсчета временной интервал t'_{12} между событиями принимает минимальное значение:

$$S_{12} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = S'_{12} = ict'_{12}, \quad (5.15)$$

$$S_{12}^2 = r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2 = -c^2 (t'_{12})^2,$$

$$t'_{12} = -\frac{i}{c} \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}. \quad (5.16)$$

2. Не существует системы отсчета, в которой события происходят в одно и то же время: $t'_{12} = 0$.

3. События, связанные времениподобным интервалом, в результате перехода в другую систему отсчета не могут происходить во времени в обратной последовательности.

4. Эти два события могут быть связаны причинно-следственной связью, поскольку для этого требуется скорость передачи сигнала меньше скорости света:

$$S_{12}^2 < 0, \quad r_{12} < ct_{12}, \quad v = \frac{r_{12}}{t_{12}} < c. \quad (5.17)$$

5. Эти события могут происходить с одним и тем же телом, поскольку тело может двигаться со скоростью, меньшей скорости света, то $ct_{12} > r_{12}$ и $S_{12}^2 < 0$.

Светоподобный интервал – нулевой пространственно-временной интервал между двумя событиями $S_{12}^2 = 0$.

Свойства светоподобного интервала между двумя событиями

1. Если события происходят в одной точке пространства, то они происходят одновременно (и наоборот) в любой инерциальной системе отсчета:

$$S_{12} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = 0, \quad r_{12} = 0 \Leftrightarrow t_{12} = 0. \quad (5.18)$$

2. Не существует инерциальной системы отсчета, в которой два события, разделенные пространственным интервалом происходят одновременно или разделенные временным интервалом, происходят в одной точке пространства.

3. События, связанные светоподобным интервалом, в результате перехода в другую систему отсчета не могут происходить во времени в обратной последовательности.

Докажем это. Для рассматриваемых событий $\Delta x = \pm c \Delta t$, следовательно, в соответствии с преобразованиями Лоренца для интервалов (5.4), можно записать:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \gamma \Delta t \left(1 \mp \frac{V}{c} \right). \quad (5.19)$$

Как видим, знак временного интервала $\Delta t'$ совпадает со знаком интервала Δt при любых возможных скоростях движения системы S' относительно системы S .

4. Эти два события могут быть связаны причинно-следственной связью, если используется сигнал, передающийся со скоростью света:

$$S_{12}^2 = 0, \quad r_{12} = c t_{12}, \quad v = \frac{r_{12}}{t_{12}} = c. \quad (5.20)$$

5. Эти события не могут происходить с одним и тем же телом, имеющим массу покоя, поскольку оно не может двигаться со скоростью света.

Понятия времениподобный, пространственноподобный и светоподобный интервалы – понятия абсолютные, не зависящие от выбора инерциальной системы отсчета.

5.1.5. Преобразование (сложение) скоростей

В соответствии с преобразованиями Лоренца (5.2) и определением скорости (см. п. 1.1 в Главе 1)

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt}, \\ v_y = \frac{dy}{dt}, \\ v_z = \frac{dz}{dt}; \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'}; \end{cases} \quad (5.21)$$

получим:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \\ v'_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \\ v'_z = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v'_y}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_z = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v'_z}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}. \end{cases} \quad (5.22)$$

Относительная скорость – скорость движения одного тела относительно системы отсчета, связанной с другим телом. Эта скорость не может быть больше скорости света.

Скорость сближения тел – скорость изменения расстояния между телами в данной системе отсчета. Эта скорость может быть больше скорости света.

5.2. Основные типы задач и методы их решения

5.2.1. Классификация задач кинематики в теории относительности

Большинство задач кинематики в теории относительности можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на:

- 1) преобразования Лоренца или их следствия ("относительность одновременности", "замедление времени" и "сокращение длины");
- 2) инвариантность пространственно-временных интервалов;

3) преобразования скоростей.

Как правило, один из типов задач имеет основное, другие – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

5.2.2. Общая схема решения задач кинематики в теории относительности

I. Определиться с событиями и системами отсчета.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела (если это необходимо).
2. Выбрать движущиеся друг относительно друга инерциальные системы отсчета и изобразить на чертеже их системы координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить скорости тел.
4. Выбрать интересующие нас события и записать их пространственно-временные координаты относительно выбранных систем отсчета.

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать преобразования Лоренца или их следствия (для задач типа (1)).
2. Записать пространственно-временные интервалы между событиями (для задач типа (2)).
3. Записать формулы преобразования скоростей (для задач типа (3)).
4. Использовать условия задачи (например, соотношения между характеристиками системы и пространственно-временными координатами событий).

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (рассмотреть характерные случаи).
3. Получить численный результат.

5.3. Примеры решения задач

Задача 5.1

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в системе отсчета S . Время пролета в этой системе $\Delta t = 20$ нс. В системе же отсчета S' , связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

Решение

I. Пусть стержень, а значит и система S' , движутся со скоростью V вдоль оси X системы S . С такой же по величине скоростью, но в обратном направлении, движется метка относительно стержня. Для решения задачи воспользуемся рис. 5.4 (см. п. 5.1. Теоретический материал). Определим события A и B , как моменты пролета метки мимо обоих концов стержня. Обозначим пространственно-временные координаты этих событий, как (x'_1, t'_1) и (x'_2, t'_2) в системе отсчета S' и как (x_1, t_1) и (x_2, t_2) в системе отсчета S . Заметим, что в соответствии с выбором событий $x_1 = x_2$.

II. Искомая собственная длина стержня l_0 равна пространственному интервалу между событиями A и B в системе отсчета, связанной со стержнем — $l_0 = x'_2 - x'_1$. Поскольку метка движется относительно стержня со скоростью V , то

$$l_0 = V\Delta t', \quad (5.23)$$

где $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ — временной интервал между рассматриваемыми событиями в системе отсчета S' .

Для нахождения V запишем преобразования Лоренца для временных интервалов $\Delta t'$ и $\Delta t = t_2 - t_1$ (см. (5.5)):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (5.24)$$

Заметим, что в данном случае сокращается интервал времени Δt , поскольку в системе отсчета S события A и B происходят в одной точке пространства (наблюдается "замедление времени").

III. Используя (5.24), определим величину скорости V :

$$V = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'} \right)^2}. \quad (5.25)$$

В соответствии с (5.23) и (5.25) искомая собственная длина стержня (длина стержня в неподвижной относительно него системе отсчета S') равна

$$l_0 = V \Delta t' = c \Delta t' \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'} \right)^2}. \quad (5.26)$$

Подставив в (5.26) значения $\Delta t = 20$ нс и $\Delta t' = 25$ нс, заданные в условии задачи, а также значение скорости света $c \cong 3 \cdot 10^8$ м/с, получим:

$$l_0 = 4,5 \text{ м.}$$

Задача 5.2

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Какой путь пролетит эта частица, двигаясь с постоянной скоростью, до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни $\Delta t = 20$ нс?

Решение

I. Выберем системы отсчета. Свяжем систему отсчета S' с движущейся частицей. Следовательно, система S' движется относительно лабораторной системы S со скоростью движения частицы V . Для решения задачи воспользуемся рис. 5.3 (см. п. 5.1. Теоретический материал). Определим события А и В как события, состоящие в рождении и распаде частицы соответственно. Пусть пространственно-временные координаты этих событий в системе отсчета S равны (x_1, t_1) и (x_2, t_2) , а в системе отсчета S' – (x'_1, t'_1) и (x'_2, t'_2) , причем $x'_1 = x'_2$. Собственное время жизни нестабильной частицы Δt_0 – время жизни в системе отсчета S' , в которой эти два события происходят в одной и той же точке пространства:

$$\Delta t_0 = \Delta t' = t'_2 - t'_1 \quad (5.27)$$

II. Искомый путь l , который пролетит частица до своего распада в лабораторной системе отсчета S определяется ее скоростью и временем жизни частицы в этой системе:

$$l = V \Delta t. \quad (5.28)$$

Для нахождения скорости частицы (а, следовательно, и скорости движущейся системы отсчета S') воспользуемся следствием преобразований Лоренца – "замедлением времени". Поскольку в системе отсчета S' события А и В происходят в одной точке пространства, то, согласно (5.5), должно наблюдаться сокращение интервала времени в системе S' между рассматриваемыми событиями. Таким образом, собственное время жизни и время жизни в лабораторной системе отсчета связаны следующим соотношением:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (5.29)$$

III. Используя (5.29), определим скорость системы отсчета S' :

$$V = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \right)^2}. \quad (5.30)$$

Подставляя полученное выражение (5.30) для скорости в (5.28), определим искомый путь l , который пролетит частица до своего распада в лабораторной системе отсчета S :

$$l = c \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \right)^2}. \quad (5.31)$$

Подставив в (5.31) численные значения величин Δt_0 и Δt , заданные в условии задачи, получаем:

$$l = 5,2 \text{ м.}$$

Задача 5.3

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Система отсчета S' движется относительно системы S вдоль оси X с постоянной скоростью $V = 0,9c$. В каждой системе в точках с координатами -200 м, -100 м, 0 м, 100 м и 200 м находятся одинаковые синхронизованные часы. За начало отсчета времени в обеих системах отсчета взят такой момент, когда часы, неподвижные относительно системы S и имеющие координату $x = 0$ м, окажутся напротив часов, неподвижных относительно системы S' и имеющих координату $x' = 0$ м. Определить время, которое в этот момент будут показывать часы, а также их координаты "с точки зрения" наблюдателей, находящихся как в системе S , так и в системе S' . Изобразить расположение часов обеих систем и примерное положение

стрелок этих часов в этот момент времени относительно различных систем отсчета.

Решение

I. Пусть событие A_j ($j=1, 2, 3, 4, 5$) заключается в том, что в момент времени $t_{A_j} = 0$ по часам системы S фиксируется показания j -ых часов, расположенных в системе S' в точке с координатой x'_{A_j} (принимаяющей значения -200 м, -100 м, 0 м, 100 м и 200 м для разных часов) в системе S' . Событие B_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) – фиксация показания k -ых часов системы S , имеющих координату x_{B_k} (-200 м, -100 м, 0 м, 100 м и 200 м) в системе S в момент времени $t'_{B_k} = 0$ по часам системы S' . Обратим внимание на то, что все события A_j происходят в один и тот же момент времени в системе S . И наоборот, все события B_j происходят в один и тот же момент времени в системе S' .

II. Пространственно-временные координаты событий A_j и B_k в системах S и S' связаны преобразованиями Лоренца (см. (5.3)), полученными с учетом $t_{A_j} = 0$ и $t'_{B_k} = 0$:

$$x'_{A_j} = \gamma x_{A_j}, \quad t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} \gamma x_{A_j}; \quad (5.32)$$

$$x_{B_k} = \gamma x'_{B_k}, \quad t_{B_k} = \frac{V}{c^2} \gamma x'_{B_k}. \quad (5.33)$$

Здесь t'_{A_j} – показания часов системы S' , x_{A_j} – координата часов системы S' в системе S , t_{B_k} – показания часов системы S , x'_{B_k} – координата часов системы S в системе S' .

Систему уравнений (5.32), (5.33) дополним выражением для Лоренц-фактора:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (5.34)$$

III. Решая полученную систему уравнений (5.32) – (5.34) относительно неизвестных пространственно-временных координат (t'_{A_j} , x_{A_j} и t_{B_k} , x'_{B_k}) интересующих нас событий A и B и модуля скорости V движения системы отсчета S' относительно S , получим:

$$x_{A_j} = \frac{1}{\gamma} x'_{A_j} = x'_{A_j} \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} x'_{A_j}; \quad (5.35)$$

$$x'_{B_k} = \frac{1}{\gamma} x_{B_k} = x_{B_k} \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad t_{B_k} = \frac{V}{c^2} x_{B_k}. \quad (5.36)$$

Изобразим на рисунках расположение часов обеих систем и положение стрелок этих часов относительно различных систем отсчета с учетом того, что координаты x'_{A_j} и x_{B_k} часов в каждой из своих систем отсчета различны.

На рис 5.5 расположение часов и положение их стрелок соответствуют случаю, когда наблюдатель находится в системе S, а на рис. 5.6 – когда наблюдатель находится в системе S'.

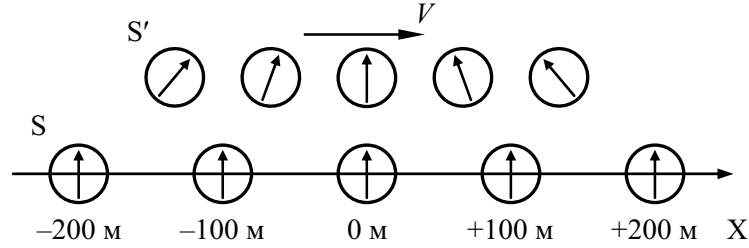


Рис. 5.5

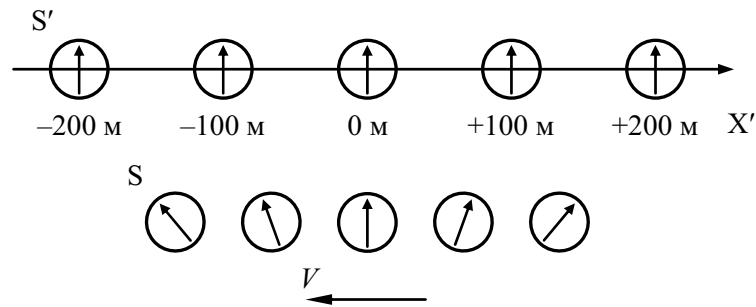


Рис. 5.6

Как видим, пространственные интервалы между соседними часами в обеих системах отсчета "с точки зрения" наблюдателей, находящихся в другой системе, уменьшается в γ раз (см. (5.35) и (5.36)). При этом показания часов линейно зависят от их пространственных координат в своих системах отсчета. Если часы располо-

жены относительно начала отсчета своей системы координат в направлении скорости ее движения относительно другой системы отсчета, то они отстают от часов, расположенных в начале отсчета (см. рис. 5.5 и 5.6). И наоборот, часы расположенные относительно начала отсчета своей системы координат в направлении, противоположном скорости ее движения относительно другой системы отсчета, опережают часы, расположенные в начале отсчета (см. рис. 5.5 и 5.6).

Оценим максимальное различие в показаниях часов, которое соответствует часам, расположенным на максимальном расстоянии друг от друга. В соответствии с условием задачи $V = 0,9c$, $x'_{A_1} = x_{B_1} = -200$ м и $x'_{A_5} = x_{B_5} = 200$ м, следовательно:

$$\begin{aligned} t'_{A_5} - t'_{A_1} &= -\frac{V}{c^2} x'_{A_5} + \frac{V}{c^2} x'_{A_1} = \frac{V}{c^2} (x'_{A_1} - x'_{A_5}) = \\ &= -1,2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = -1,2 \text{ мкс} \end{aligned} \quad (5.37)$$

и

$$\begin{aligned} t_{B_5} - t_{B_1} &= \frac{V}{c^2} x_{B_5} - \frac{V}{c^2} x_{B_1} = \frac{V}{c^2} (x_{B_5} - x_{B_1}) = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 1,2 \text{ мкс} . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Задача 5.4

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Межзвездный корабль движется от Земли к звезде, находящейся от нее на расстоянии $L = 3$ световых года, со скоростью $V = 5 \cdot 10^6$ м/с. Достигнув звезды, корабль возвращается обратно с той же по величине скоростью. На какое время Δt часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на Землю? При решении задачи пренебречь временем, затраченным на разгон и торможение ракеты.

Решение

I. Предположим, что система отсчета S , связанная с Землей и звездой, является инерциальной. Другую инерциальную систему отсчета S' свяжем с движущимся относительно Земли межзвездным кораблем. Пусть корабль, а значит и система S' , движутся со скоростью V вдоль оси X системы S . Определим, как обычно, интересные нас события:

А – межзвездный корабль начал двигаться со скоростью V к звезде;

В – корабль долетел до звезды;

С – межзвездный корабль возвратился обратно на Землю.

II. Интервалы времени между событиями А и В и событиями В и С в системе отсчета S равны

$$T_{AB} = T_{BC} = \frac{L}{V}. \quad (5.39)$$

С точки зрения космонавта, находящегося в корабле, события А, В и события В, С происходят в одной точке пространства. Следовательно, для системы отсчета, связанной с кораблем, происходит сокращение интервала времени между событиями А, В и В, С, то есть наблюдается "замедлением времени". Тогда, согласно (5.6), в системе отсчета S':

$$T'_{AB} = T'_{BC} = \frac{L}{V\gamma}. \quad (5.40)$$

Время Δt , на которое часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на Землю, равно:

$$\Delta t = (T_{AB} + T_{BC}) - (T'_{AB} + T'_{BC}) \quad (5.41)$$

III. Решая систему уравнений (5.39) – (5.41) относительно Δt получаем:

$$\Delta t = \frac{2L}{V} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}). \quad (5.42)$$

Поскольку по условию задачи $\frac{V}{c} \cong 0.33 \cdot 10^{-2} \ll 1$, то

$1 - \sqrt{1 - \beta^2} \approx \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{V^2}{2c^2}$ и, следовательно, искомое время, на которое часы на корабле отстанут от земных часов равно

$$\Delta t \approx \frac{2L}{V} \cdot \frac{V^2}{2c^2} = \frac{LV}{c^2} \approx 0,05 \text{ года} \approx 18 \text{ сут.} \quad (5.43)$$

Задача 5.5

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Стержень, движущийся со скоростью $V = c/2$ относительно системы S, имеет собственную длину $l_0 = 1$ м. В системе отсчета S', связанной с движущимся стержнем, угол между стержнем и на-

правлением его движения составляет $\varphi_0 = 45^\circ$ (рис. 5.7). Найти длину стержня l и угол его наклона φ в системе S .

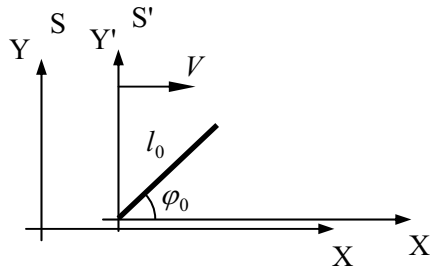


Рис. 5.7

Решение

I. Поскольку в соответствии с условием задачи, необходимо определить длину стержня в системе отсчета S , определим следующие два события – А и В. Эти события состоят в том, что одновременно измерены положения двух концов стержня в системе S . Пусть пространственно-временные координаты этих событий в системе отсчета S равны (x_1, y_1, t_1) и (x_2, y_2, t_2) , причем $t_1 = t_2$. В системе отсчета S' события А и В происходят не одновременно, их пространственно-временные координаты равны соответственно (x'_1, y'_1, t'_1) и (x'_2, y'_2, t'_2) .

II. Собственная длина стержня (длина стержня в неподвижной относительно него системе отсчета S') равна:

$$l_0^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2. \quad (5.44)$$

Интервалы $\Delta x'$ и $\Delta y'$ связаны с собственной длиной стержня l_0 и углом его наклона φ_0 в системе отсчета S' следующими соотношениями:

$$\Delta x' = l_0 \cos \varphi_0 \text{ и } \Delta y' = l_0 \sin \varphi_0. \quad (5.45)$$

Поскольку события А и В происходят одновременно в системе отсчета S , для определения длины стержня в системе отсчета S воспользуемся следствием преобразований Лоренца – "сокращением длины" (см. п. 5.1.3). Согласно (5.7):

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'. \quad (5.46)$$

При этом в соответствии с преобразованиями Лоренца (5.4) сокращение интервала Δy между координатами y_1 и y_2 наблюдаться не будет: $\Delta y = \Delta y'$.

Длина стержня l определяется его проекциями на оси системы отсчета S:

$$l^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \quad (5.47)$$

Угол наклона стержня в системе S связан с интервалами Δx и Δy следующим образом:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right). \quad (5.48)$$

III. Подставив в формулу (5.47) соотношения (5.45) и (5.46), получим длину стержня в системе отсчета S:

$$l = l_0 \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + \frac{\cos^2 \varphi_0}{\gamma^2}} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \cos^2 \varphi_0}. \quad (5.49)$$

Воспользовавшись соотношениями (5.46) и (5.48) получим угол наклона стержня в той же системе отсчета:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\gamma \Delta y'}{\Delta x'}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \operatorname{tg} \varphi_0\right). \quad (5.50)$$

Подставив в (5.49) и (5.50) заданные в условии задачи значения l_0 и V , получим численные значения искомых величин:

$$l \approx 0,935 \text{ м}, \quad \varphi \approx 49^\circ. \quad (5.51)$$

Задача 5.6

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Космический корабль летит со скоростью $V = 0,6c$ от одного неподвижного космического маяка к другому. В тот момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих импульсов. Расстояние между маяками свет проходит за время $\tau = 60$ сут.

Решение

I. Свяжем систему отсчета S' с космическим кораблем, а систему отсчета S с неподвижными маяками (рис. 5.8).

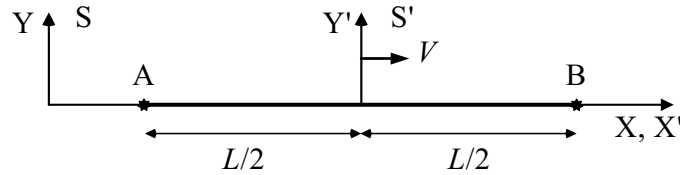


Рис. 5.8

Пусть события А и В состоят в том, что на корабле происходит последовательная регистрация двух испущенных маяками световых импульсов. В системе отсчета S сначала в момент времени t_1 в точке с координатой x_1 происходит регистрация импульса, испущенного маяком В. Регистрация импульса, испущенного маяком А, происходит в последующий момент времени t_2 в точке с координатой x_2 .

II. Для наблюдателя, находящегося в системе отсчета S, моменты времени регистрации сигналов определяются соотношениями:

$$ct_1 = \frac{L}{2} - Vt_1, \quad (5.52)$$

$$ct_2 = \frac{L}{2} + Vt_2. \quad (5.53)$$

Тогда интервал времени между событиями А и В в системе отсчета S будет равен:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{c - V} - \frac{1}{c + V} \right) = \frac{LV}{c^2 - V^2}. \quad (5.54)$$

Здесь L – расстояние между космическими маяками, причем в соответствии с условием задачи

$$L = c\tau. \quad (5.55)$$

Воспользуемся следствием преобразований Лоренца – "замедлением времени". Поскольку в системе отсчета S' события А и В происходят в одной точке пространства, то, согласно (5.6), должно наблюдаться сокращение интервала времени между рассматриваемыми событиями в этой системе:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}. \quad (5.56)$$

III. Воспользовавшись соотношениями (5.54) – (5.56), определим искомый промежуток времени между моментами регистрации световых импульсов на корабле:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = \frac{LV}{c^2 - V^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c} = \frac{c \tau V}{c \sqrt{c^2 - V^2}} = \\ &= \tau \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}.\end{aligned}\quad (5.57)$$

Подставляя в (5.57) заданные в условии задачи значения скорости космического корабля $V = 0,6c$ и времени, необходимого для прохождения света между маяками $\tau = 60$ сут., получаем:

$$\Delta t' = 45 \text{ сут.}$$

Задача 5.7

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Корабль, летящий по направлению к Земле, испускает последовательно два коротких световых импульса с интервалом времени $\tau_1 = 1$ мин. Отраженный от Земли первый импульс возвращается на корабль через время $T = 1,5$ месяца. При этом временной интервал между принятыми сигналами составляет $\tau_2 = 15$ с. Промежутки времени τ_1 , τ_2 и T отсчитываются по часам корабля. Найти скорость корабля и время T_3 , которое пройдет на Земле от момента регистрации земным наблюдателем первого светового импульса до прилета корабля.

Решение

I. Определим интересующие нас события:

- A – испускание кораблем первого светового импульса;
- B – испускание кораблем второго светового импульса;
- A₁ – отражение первого импульса от поверхности Земли;
- B₁ – отражение второго импульса от поверхности Земли;
- A₂ – регистрация первого импульса кораблем;
- B₂ – регистрация второго импульса кораблем;
- C – прилет корабля на Землю.

На рис. 5.9 схематично (без соблюдения масштаба) изображена временная последовательность указанных событий в системах отчета, связанных с Землей (верхняя на рисунке ось времени t) и с кораблем (нижняя ось t').

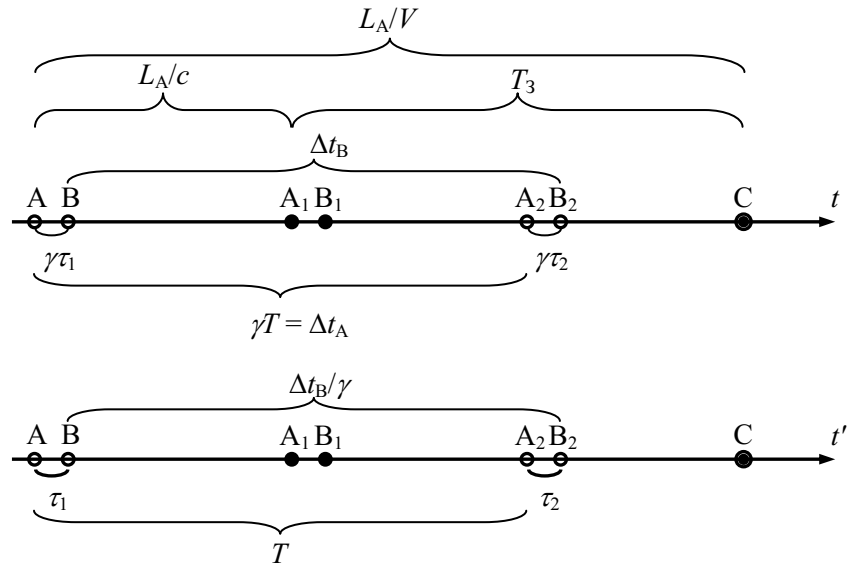


Рис. 5.9

События, произошедшие на корабле, обозначены незакрашенными кружками, а события, произошедшие на Земле, – закрашенными кружками. На рисунке изображены также интервалы времени между событиями, заданные в условии задачи по часам корабля, – τ_1 , τ_2 и T . В соответствии со следствием преобразований Лоренца – так называемым "замедлением времени" (см. Теоретический материал, формула (5.6)) – интервалы времени, соответствующие тем же парам событий, измеренные по земным часам, увеличиваются в γ раз (см. рис. 5.9).

II. Поскольку по условию задачи задан интервал времени T между событиями A и A_2 в системе отсчета, связанной с кораблем, запишем интервал времени Δt_A между теми же событиями в системе отсчета, связанной с Землей, как функцию скорости корабля:

$$\Delta t_A = \frac{L_A + (L_A - V\Delta t_A)}{c}, \quad (5.58)$$

где L_A – расстояние между Землей и кораблем в момент времени, когда произошло событие A в системе отсчета, связанной с Землей.

С другой стороны, используя следствие преобразований Лоренца, "замедление времени", можно записать:

$$\Delta t_A = \gamma T. \quad (5.59)$$

Уравнение, аналогичное (5.58), запишем для интервала времени Δt_B между событиями В и В₂ в системе отсчета, связанной с Землей:

$$\Delta t_B = \frac{L_B + (L_B - V\Delta t_B)}{c}, \quad (5.60)$$

где L_B – расстояние между Землей и кораблем в момент времени, когда произошло событие В в системе отсчета, связанной с Землей. Как видно в верхней части рис. 5.9, интервал времени Δt_B может быть выражен через заданные в задаче интервалы τ_1 , τ_2 и T :

$$\Delta t_B = \gamma T - \gamma\tau_1 + \gamma\tau_2. \quad (5.61)$$

Запишем пройденный кораблем путь с момента испускания первого светового импульса до момента испускания второго светового импульса (пространственный интервал между событиями А и В) в системе отсчета, связанной с Землей (за время $\gamma\tau_1$):

$$L_A - L_B = V\gamma\tau_1. \quad (5.62)$$

Искомый интервал времени между событиями А₁ и С

$$T_3 = \frac{L_A}{V} - \frac{L_A}{c}. \quad (5.63)$$

III. Решая систему уравнений (5.58) – (5.63), находим скорость движения корабля V и время T_3 , которое пройдет на Земле от момента регистрации земным наблюдателем первого светового импульса до прилета корабля:

$$V = c \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}, \quad (5.64)$$

$$T_3 = T \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}{\tau_1 - \tau_2}. \quad (5.65)$$

Подставляя численные значения интервалов времени, заданных в условии задачи, получим:

$$V = 0,6c, \quad T_3 \cong 1 \text{ месяц}.$$

Задача 5.8

(Преобразования Лоренца или их следствия)

Два звездолета с выключенными двигателями движутся навстречу друг другу (см. рис. 5.10). На носу и на корме первого звездолета периодически, каждые $\tau_1 = 1$ с, по часам этого звездолета одновременно зажигаются сигнальные огни. На втором звездолете каждые $\tau_2 = 0,5$ с наблюдают две вспышки с интервалом времени $\Delta\tau = 1$ мкс. Найти собственную длину l_0 первого звездолета и скорость U относительного движения звездолетов.



Рис. 5.10

Решение

I. Свяжем систему отсчета S с первым звездолетом, тогда второй звездолет, с которым свяжем систему отсчета S' , будет двигаться относительно системы S со скоростью U (рис. 5.10).

Определим интересующие нас события:

A и B – две ближайшие по времени вспышки, происходящие на носу первого звездолета;

A_1 и B_1 – регистрация этих вспышек на втором звездолете;

C – вспышка на корме первого звездолета, которая произошла одновременно в системе отсчета S со вспышкой на носу этого звездолета (событие A);

C_1 – регистрация на втором звездолете вспышки, произошедшей на корме первого звездолета.

На рис. 5.11 схематично изображена временная последовательность указанных событий в системах отчета, связанных с первым (верхняя на рисунке ось времени t) и со вторым звездолетом (нижняя ось t').

События, произошедшие на первом звездолете, обозначены незакрашенными кружками, а события, произошедшие на втором звездолете, – закрашенными кружками.

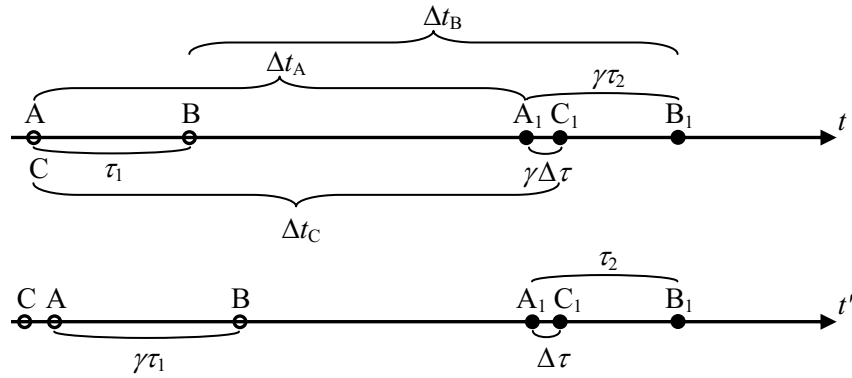


Рис. 5.11

На рис. 5.11 изображены также интервалы времени между событиями, заданные в условии задачи, – τ_1 , τ_2 и $\Delta\tau$. Эти интервалы времени относятся к событиям, происходящим в одной точке пространства, – A и B в системе S (интервал τ_1), A₁ и B₁ в системе S' (интервал τ_2), A₁ и C₁ в системе S' (интервал $\Delta\tau$). В соответствии со следствием преобразований Лоренца – "замедлением времени" (см. Теоретический материал, формулу (5.6)) – эти интервалы времени, соответствующие тем же парам событий, измеренные по часам другой системы отсчета, увеличиваются в γ раз (см. рис. 5.11), где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (U/c)^2}}.$$

II. Пусть в момент вспышки света на носу первого звездолета (событие A) второй звездолет находился на расстоянии L_A в системе отсчета S. Тогда интервал времени Δt_A между событиями A и A₁ в этой системе отсчета с учетом скорости сближения звездолетов равен:

$$\Delta t_A = \frac{L_A}{c + U}. \quad (5.66)$$

Вспышка света на корме первого звездолета (событие C), произошедшая одновременно с первой вспышкой на его носу (событие A) будет зарегистрирована на втором звездолете через время Δt_C по часам первого звездолета:

$$\Delta t_C = \frac{L_A + l_0}{c + U}. \quad (5.67)$$

Интервал времени Δt_B между событиями В и В₁ в системе отсчета S с учетом уменьшения расстояния между звездолетами за время τ_1 равен:

$$\Delta t_B = \frac{L_A - U\tau_1}{c + U}. \quad (5.68)$$

Как видно на рис. 5.11, рассматриваемые интервалы времени связаны между собой соотношениями:

$$\Delta t_C = \Delta t_A + \gamma \Delta \tau, \quad (5.69)$$

$$\Delta t_B = \Delta t_A - \tau_1 + \gamma \tau_2. \quad (5.70)$$

III. Решаем полученную систему уравнений (5.66) – (5.70) относительно искомых величин l_0 и U :

$$l_0 = c \Delta \tau \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad (5.71)$$

$$U = \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_2^2 + \tau_1^2} c. \quad (5.72)$$

Подставив в (5.71) и (5.72) заданные численные значения τ_1 , τ_2 и $\Delta \tau$, определим собственную длину первого звездолета l_0 и скорость относительного движения звездолетов U :

$$l_0 = 600 \text{ м}, U = \frac{3}{5} c. \quad (5.73)$$

Задача 5.9

(Инвариантность пространственно-временных интервалов)

В некоторой системе отсчета происходят два события со следующими пространственно-временными координатами: $x_1 = 0$; $t_1 = 0$ (событие А) и $x_2 = 5 \text{ м}$; $t_2 = 10^{-8} \text{ с}$ (событие В). Определить:

1) в какой системе отсчета эти события происходят на минимальном расстоянии друг от друга $|\Delta x'|_{\min}$, найти это расстояние и скорость движения системы отсчета V ;

2) в какой системе отсчета эти события происходят с минимальным временным интервалом $|\Delta t'|_{\min}$, найти этот интервал и скорость системы отсчета V ;

3) могут ли эти события находиться в причинно-следственной связи.

Решение

I. В условии задачи заданы пространственно-временные координаты событий А и В в системе отсчета S. Определим величину квадрата пространственно-временного интервала (5.9) между этими событиями:

$$S_{12}^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = 16m^2 > 0, \quad (5.74)$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$.

Так как $S_{12}^2 > 0$, то интервал между рассматриваемыми событиями – пространственно-подобный, и поэтому события А и В не могут быть связаны причинно-следственной связью (см. п. 5.1.4. Пространственно-временной интервал)

II. Поскольку пространственно-временной интервал инвариантен ($S_{12} = S'_{12}$), то величина $|\Delta x'|$ будет минимальна в системе S', когда $\Delta t' = 0$:

$$|\Delta x'|_{\min} = \sqrt{S'_{12}} = \sqrt{S_{12}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2}. \quad (5.75)$$

Очевидно, что $|\Delta t'|_{\min} = 0$ в той же системе отсчета S'.

Для определения скорости системы отсчета S' можно воспользоваться одним из преобразований Лоренца (5.4):

$$\Delta t' = \left(\Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c} \right) \gamma. \quad (5.76)$$

III. Используя (5.76) при $\Delta t' = 0$, получим:

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{c \Delta t}{\Delta x} = c \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} \text{ и } V = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}. \quad (5.77)$$

Подставив численные значения пространственно-временных координат событий в (5.75) и (5.77), получим значения искомых величин:

$$|\Delta x'|_{\min} = 4 \text{ м}, \quad \beta = \frac{3}{5} \text{ и } V = \frac{3}{5} c.$$

Задача 5.10

(Преобразования скоростей)

Два стержня одинаковой собственной длиной l_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси с одной и той же по величине скоростью V относительно лабораторной системы отсчета S (рис. 5.12). Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем.

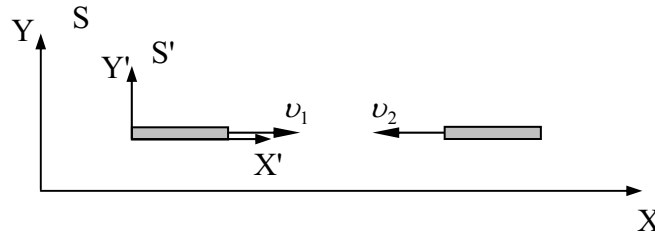


Рис. 5.12

Решение

I. Свяжем систему отсчета S' с первым стержнем (см. рис. 5.12). Скорость этой системы отсчета относительно лабораторной системы S совпадает со скоростью первого стержня v_1 и равна V . Скорость второго стержня относительно той же системы S равна $v_2 = -V$.

Определим длину второго стержня относительно системы отсчета S' , связанной с первым стержнем. Для этого необходимо провести измерение координат концов второго стержня в системе S' одновременно. Пусть события A и B состоят в том, что в системе S' одновременно фиксируются положения двух концов второго стержня.

II. В соответствии со следствием преобразований Лоренца – "сокращением длины" – в системе отсчета S' , для которой события A и B происходят одновременно, наблюдается сокращение пространственного интервала – длины второго стержня:

$$l'_2 = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v'_2}{c}\right)^2}, \quad (5.78)$$

где v'_2 – скорость второго стержня относительно системы отсчета S' . Определим эту скорость, используя формулу преобразования скоростей (5.21):

$$v'_2 = \frac{v_2 - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_2} = -\frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}}. \quad (5.79)$$

III. Подставив найденную скорость v'_2 (5.79) в соотношение (5.78), получим:

$$l'_2 = l_0 \sqrt{1 - \frac{4V^2}{\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)^2 c^2}} = l_0 \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}. \quad (5.80)$$

Связав систему отсчета S' со вторым стержнем, аналогичным образом можно получить длину первого стержня в системе отсчета, связанной со вторым стержнем:

$$l'_1 = l_0 \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}. \quad (5.81)$$

Задача 5.11

(Преобразования скоростей)

Два неподвижных прожектора излучают узкие пучки света в противоположных направлениях относительно оси Y лабораторной системы отсчета (см. рис. 5.13). С какой скоростью U эти прожекторы должны двигаться в направлении, перпендикулярном оси Y , чтобы пучки света распространялись под углом $\alpha = 90^\circ$ друг к другу?

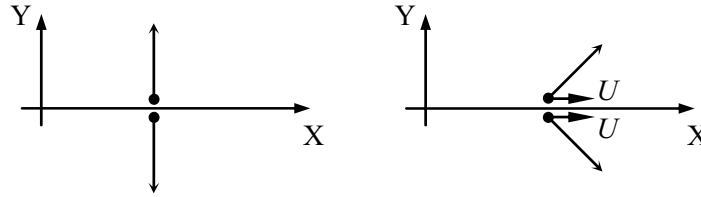


Рис. 5.13

Решение

I. В соответствии с условием задачи направим ось Y лабораторной системы отсчета S вдоль пучка света, излучаемого одним из прожекторов (рис. 5.13), а ось X – в направлении их движения. Свяжем систему отсчета S' с прожекторами, движущимися со ско-

ростью U относительно лабораторной системы S , и направим ее оси X' и Y' вдоль осей X и Y соответственно.

II. Поскольку прожектора покоятся относительно системы S' , то проекции скоростей распространения двух пучков света относительно этой системы в соответствии с условием задачи равны:

$$v'_{1x} = v'_{2x} = 0, \quad v'_{1y} = c \quad \text{и} \quad v'_{2y} = -c. \quad (5.82)$$

Запишем формулы преобразования (сложения) скоростей (5.22) для определения проекций скоростей распространения пучков света относительно лабораторной системы отсчета S :

$$v_{1x} = \frac{U + v'_{1x}}{1 + \frac{Uv'_{1x}}{c^2}}, \quad v_{2x} = \frac{U + v'_{2x}}{1 + \frac{Uv'_{2x}}{c^2}}, \quad (5.83)$$

$$v_{1y} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2} v'_{1y}}{1 + \frac{Uv'_{1x}}{c^2}}, \quad v_{2y} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2} v'_{2y}}{1 + \frac{Uv'_{2x}}{c^2}}. \quad (5.84)$$

Для того чтобы пучки света распространялись под углом $\alpha = 90^\circ$ в лабораторной системе отсчета, необходимо выполнение следующих условий:

$$v_{1x} = v_{1y} \quad \text{и} \quad v_{2x} = -v_{2y}. \quad (5.85)$$

III. Определим проекции скоростей распространения пучков относительно системы отсчета S (5.83) и (5.84) с учетом соотношений (5.82):

$$v_{1x} = v_{2x} = U, \quad v_{1y} = c\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}, \quad v_{2y} = -c\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}. \quad (5.86)$$

Подставив полученные значения проекций скоростей в (5.85), определим, с какой скоростью U должны двигаться прожекторы в направлении, перпендикулярном лучам, для того, чтобы пучки света распространялись под углом 90° друг к другу:

$$U = c\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}. \quad (5.87)$$

Следовательно

$$U = \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (5.88)$$

Задача 5.12

(Преобразование скоростей)

Стержень АВ ориентирован параллельно оси X' в системе отсчета S' и движется в этой системе со скоростью $U' = 0,7c$, направленной противоположно оси Y' (см. рис. 5.14). Система S' в свою очередь движется со скоростью $V = 0,6c$ относительно лабораторной системы отсчета S в направлении ее оси X , совпадающей по направлению с осью X' . Найти угол между стержнем и осью X в системе S .

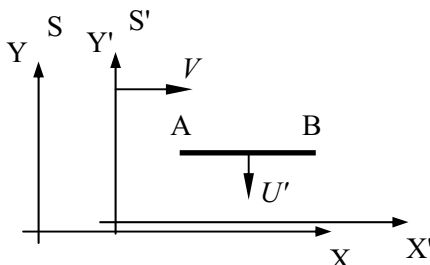


Рис. 5.14

Решение

I. Пусть интересующими нас событиями будут события C и D , состоящие в том, что в некоторый момент времени концы стержня совпали с осью X' в системе отсчета S' . Пространственно-временные координаты событий C и D в системе отсчета S равны (x_1, y_1, t_1) и (x_2, y_2, t_2) , а в системе отсчета S' — (x'_1, y'_1, t'_1) и (x'_2, y'_2, t'_2) (см. рис. 5.15).

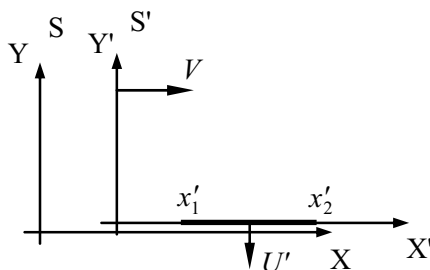


Рис. 5.15

II. События С и D в системе отсчета S' происходят одновременно, то есть

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0. \quad (5.89)$$

В отличие от системы S' в системе S события С и D происходят не одновременно. В соответствии с преобразованиями Лоренца интервал времени Δt между событиями С и D в системе S с учетом (5.89) равен:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (5.90)$$

Поскольку $\Delta x' = x'_2 - x'_1 > 0$, то $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. Это означает, что в системе отсчета S концы стержня А и В пересекут некоторую произвольную прямую $y = y_0$ в разные моменты времени, сначала А, потом через интервал времени Δt – В (см. рис. 5.16).

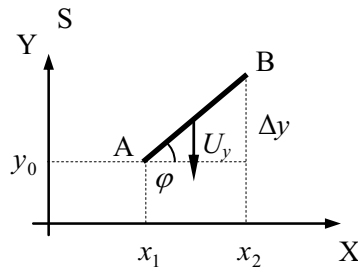


Рис. 5.16

Таким образом, в системе отсчета S стержень оказывается наклоненным к оси X под углом φ . В тот момент времени, когда конец А достиг прямой $y = y_0$, конец В оказался выше этой прямой на расстоянии

$$\Delta y = |U_y| \Delta t, \quad (5.91)$$

где U_y – скорость, с которой стержень движется вдоль оси Y в системе S. При этом согласно (5.7), в системе отсчета S произойдет сокращение интервала $\Delta x = x_2 - x_1$:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \Delta x' \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (5.92)$$

Угол поворота стержня в системе S определяется следующим образом:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right). \quad (5.93)$$

Проекция скорости стержня U_y на ось Y лабораторной системы отсчета S в соответствии с одной из формул преобразования (сложения) скоростей (5.22) равна

$$U_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot U'_y}{1 + \frac{V}{c^2} U'_x}. \quad (5.94)$$

В соответствии с условиями задачи

$$U'_x = 0, \quad U'_y = -U'. \quad (5.95)$$

III. Искомый угол φ между стержнем и осью X в системе S находим, решая полученную систему уравнений (5.90) – (5.95):

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{U'V}{c^2 \sqrt{1 - (V/c)^2}}\right). \quad (5.96)$$

Подставляя в (5.96) численные значения скоростей движения стержня и системы S', заданные в условии задачи, получаем:

$$\varphi \cong 27,7^\circ.$$

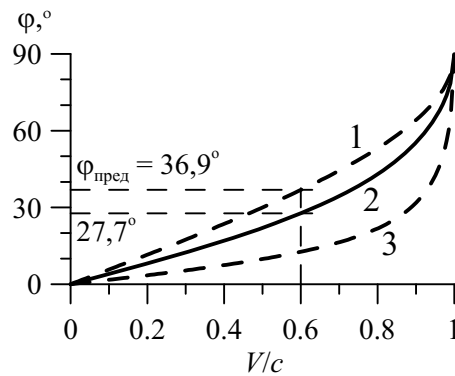


Рис. 5.17

Проанализируем зависимость угла φ (5.96) от скорости движения V системы отсчета S' при различных скоростях движения стержня U' . На рис. 5.17 изображены графики зависимости $\varphi(V/c)$ при трех значениях параметра U'/c . График 1 соответствует значению $U'/c = 0,999$, график 2 – заданному в условии задачи значению $U'/c = 0,7$, а график 3 – $U'/c = 0,3$.

Как видим, при заданной скорости движения системы отсчета S' в лабораторной системе отсчета S угол между движущимся стержнем и осью X имеет предельное значение $\varphi_{\text{пред}}$, определяемое графиком 1 на рис. 5.17.

5.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость $V = c/2$, длина $l = 1$ м и угол между ним и направлением движения $\vartheta = 45^\circ$.

Ответ: $l_0 = l \sqrt{(1 - (V/c)^2 \sin^2 \vartheta) / (1 - (V/c)^2)} = 1,08$ м.

Задача 2

Два стержня одинаковой собственной длиной l_0 движутся навстречу друг другу параллельно общей горизонтальной оси. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, промежуток времени между моментами совпадения левых и правых концов стержней оказался равным Δt . Какова скорость одного стержня относительно другого?

Ответ: $V = \frac{2l_0 c^2 \Delta t}{(c \Delta t)^2 + l_0^2}$.

Задача 3

Стержень, длина которого в системе отсчета S равна L , расположен в ней так, что составляет с осью X угол ϑ . Система отсчета S' движется относительно системы S со скоростью $V = c/2$ в сторону, противоположную оси Y . Определить какой угол ϑ' составляет стержень с осью X' системы отсчета S' и чему равна длина L' стержня в этой системе.

Ответ: $\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \vartheta$, $L' = L \frac{\sqrt{3 + \cos^2 \vartheta}}{2}$.

Задача 4

Космонавт спустя время τ_0 (по собственным часам) после старта получает радиограмму с сообщением о рождении внука. Тотчас же, для того, чтобы внук получил поздравление вовремя, он посылает ответную радиограмму, в которой поздравляет внука с совершеннолетием (возраст равен T). Какова скорость космического корабля?

Ответ: $V = Tc / \sqrt{4\tau_0^2 + T^2}$.

Задача 5

Система отсчета S' движется относительно лабораторной системы отсчета S со скоростью $V = c/2$ в сторону, противоположную оси X . В системе отсчета S частица движется со скоростью $U = c/2$ под углом ϑ к оси X . Найти модуль скорости частицы U' в системе отсчета S' . Определить, какой угол ϑ' составляет скорость частицы с осью X' системы отсчета S' .

Ответ: $U' = \frac{c}{4 + \cos \vartheta} \sqrt{8 + 8 \cos \vartheta - \sin^2 \vartheta}$, $\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sqrt{3} \sin \vartheta}{2(1 + \cos \vartheta)}$.

Задача 6

Два космических корабля летят вдоль одной прямой в одном направлении со скоростями $V_1 > V_2$. Со второго корабля вдогонку первому посылается два электромагнитных импульса с интервалом времени τ_1 относительно лабораторной системы отсчета. С каким интервалом времени τ_2 относительно той же системы отсчета они вернутся назад после отражения от первого корабля?

Ответ: $\tau_2 = \tau_1 \left(\frac{c + V_1}{c - V_1} \right) \left(\frac{c - V_2}{c + V_2} \right)$.

Задача 7

Два события совершаются на расстоянии $l = 6 \cdot 10^5$ км друг от друга с промежутком времени $\tau = 1$ с относительно некоторой

инерциальной системы отсчета. С какой скоростью V должен лететь космический корабль, чтобы в системе отсчета, связанной с кораблем, эти события стали одновременными?

Ответ: $V = \frac{c^2 \tau}{l} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$

Задача 8

В системе отсчета S' , движущейся со скоростью $c/2$ вдоль оси X лабораторной системы отсчета S , движется тело небольших размеров со скоростью $c/\sqrt{2}$ под углом α' к оси X' . Найти угол α , который составляет скорость тела с осью X в системе S .

Ответ: $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha'}{2 \cos \alpha' + \sqrt{2}}$

Задача 9

Две частицы с одинаковыми скоростями V движутся вдоль одной прямой и попадают в мишень с интервалом времени τ в системе отсчета, связанной с мишенью. Найти расстояние l между летящими частицами в системе отсчета, связанной с частицами.

Ответ: $l = \frac{V\tau}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$

Задача 10

Космический корабль удаляется от Земли, двигаясь сначала со скоростью v_1 , потом со скоростью v_2 . С точки зрения космонавта, находящегося на космическом корабле, время движения со скоростями v_1 и v_2 одинаково. Какое расстояние L пролетит корабль, если время движения корабля по Земным часам равно T ? (Пренебречь временем, затраченным на изменение скорости корабля.)

Ответ: $L = \frac{v_1 \gamma_1 + v_2 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} T,$

где $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}$ и $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}}.$

Задача 11

На легкую неподвижную частицу налетает тяжелая плита. Определить скорость V , приобретенную частицей после упругого столкновения с плитой, движущейся в направлении, перпендикулярном своей плоскости со скоростью $v = c/3$.

Ответ: $V = \frac{2v}{1 + (v/c)^2} = 0,6c$.

ГЛАВА 6 КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Теоретический материал

6.1.1. Кинематика абсолютно твердого тела

Абсолютно твердое тело – тело (система материальных точек), расстояния между двумя любыми материальными точками которого можно считать постоянными в условиях данной задачи.

Рассмотрим движение абсолютно твердого тела относительно лабораторной системы отсчета S . Для этого жестко свяжем систему отсчета S' с этим телом. Таким образом, интересующее нас абсолютно твердое тело выступает в качестве тела отсчета системы S' .

Запишем формулы, связывающие кинематические характеристики некоторой материальной точки относительно двух произвольно движущихся относительно друг друга систем отсчета S и S' (см. Главу 4):

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (6.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] + \mathbf{v}', \quad (6.2)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'] + \mathbf{a}'. \quad (6.3)$$

Здесь $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t)$ – радиус-векторы, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}'(t)$ – скорости и $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{a}'(t)$ – ускорения некоторой материальной точки относительно систем отсчета S и S' соответственно; $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{A}(t)$ – радиус-вектор, скорость и ускорение начала системы отсчета S' , которое может и не совпадать с материальной точкой рассматриваемого абсолютно твердого тела; $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ – угловая скорость и угловое ускорение системы S' (абсолютно твердого тела) вокруг оси вращения, проходящей через начало системы отсчета S' (рис. 6.1).

Если некоторая материальная точка M (см. рис. 6.1) принадлежит абсолютно твердому телу (телу отсчета системы S'), то, поскольку $\mathbf{v}'(t)$ и $\mathbf{a}'(t)$, для этой точки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (6.4)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'], \quad (6.5)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']]. \quad (6.6)$$

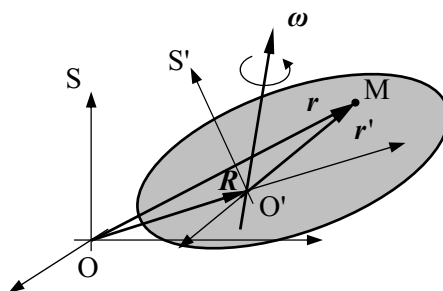


Рис. 6.1. Радиус-векторы произвольной материальной точки M абсолютно твердого тела в лабораторной системе отсчета S и системе отсчета S' , связанной с телом

Из уравнения для скорости произвольной материальной точки абсолютно твердого тела (6.5) следует принцип суперпозиции движений (материальных точек) абсолютно твердого тела.

Принцип суперпозиции движений абсолютно твердого тела – любое перемещение абсолютно твердого тела (материальных точек этого тела) в пространстве можно представить как суперпозицию последовательно осуществляемых поступательного движения этого тела (параллельного переноса со скоростью V) и поворота вокруг оси вращения (вращательного движения с угловой скоростью ω).

Поступательное движение абсолютно твердого тела – движение, при котором прямая, соединяющая любые две материальные точки тела, перемещается параллельно самой себе. Для описания поступательного движения абсолютно твердого тела достаточно описать движение любой материальной точки этого тела.

Произвольное движение абсолютно твердого тела (и жестко связанной с ней системы отсчета S') однозначно задается законом движения любой материальной точки тела (начало системы отсчета S' совпадает с этой точкой тела) $R(t)$ и законом изменения угловой скорости вращения тела (системы отсчета S') относительно этой точки $\omega(t)$.

Число степеней свободы механической системы – число независимых физических величин, так называемых **обобщенных координат**, однозначно определяющих положение тел системы в пространстве.

У абсолютно твердого тела шесть степеней свободы. Например, три координаты произвольной материальной точки тела, два угла, задающих направление прямой, соединяющей две точки и угол поворота тела вокруг этой прямой.

Плоское движение абсолютно твердого тела

Плоское движение – движение тела, при котором траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях. В случае плоского движения абсолютно твердое тело имеет три степени свободы.

Вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси – плоское движение, при котором материальные точки тела двигаются по окружностям с центрами, лежащими на этой оси, называемой **осью вращения**. В этом случае абсолютно твердое тело обладает одной степенью свободы.

При плоском движении скорость $v(t)$ и ускорение $a(t)$ материальной точки абсолютно твердого тела лежат все время в плоскости движения P этой точки (см. рис. 6.2).

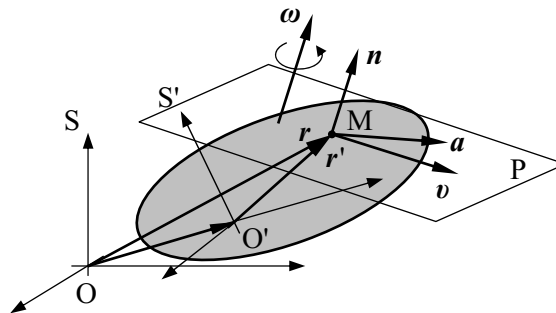


Рис. 6.2. Кинематические характеристики материальной точки M абсолютно твердого тела при его плоском движении

Действительно, пусть $n - \text{const}$ – единичный вектор нормали к плоскости движения, тогда

$$(nv) = \left(n \frac{dr}{dt} \right) = 0, \quad \frac{\partial(nv)}{\partial t} = (\dot{n}v) + (n\dot{v}) = (na) = 0. \quad (6.7)$$

Угловая скорость ω и угловое ускорение $\dot{\omega}$ абсолютно твердого тела в случае плоского движения всегда перпендикулярны плоскости движения.

Действительно, умножим обе части уравнения взаимосвязи скоростей (6.5) скалярно на нормаль к плоскости движения. Так как результат будет справедлив при любых $V(t)$ и $r'(t)$, то:

$$(nv) = \underbrace{(nV)}_{=0} + \underbrace{(n[\omega r'])}_{=0} = 0, \\ n \perp V, \quad n \parallel \omega \text{ и } \omega \perp V. \quad (6.8)$$

Умножим обе части уравнения взаимосвязи ускорений (6.6) скалярно на нормаль к плоскости движения. Так как результат будет справедлив при любых $A(t)$ и $r'(t)$, то:

$$(na) = \underbrace{(nA)}_{=0} + \underbrace{(n[\dot{\omega} r'])}_{=0} + \underbrace{(n[\omega [\omega r']])}_{=0, n \parallel \omega} = 0, \\ n \perp A \text{ и } n \parallel \dot{\omega}. \quad (6.9)$$

Покажем, что в случае плоского движения абсолютно твердого тела в любой момент времени найдется такой вектор r'_0 , что

$$v = V + [\omega r'] = [\omega r'_0]. \quad (6.10)$$

Действительно, преобразуя (6.10), получим:

$$V + [\omega, r' - r'_0] = 0, \quad d \equiv r' - r'_0, \quad [n, V + [\omega d]] = 0.$$

При этом будем искать такой вектор d , что $d \perp n$, тогда:

$$[nV] + [n[\omega d]] = [nV] + \underbrace{\omega(nd)}_{=0} - d(n\omega) = [nV] - d(n\omega) = 0, \\ d = \frac{[nV]}{(n\omega)} = \frac{[nV]}{\omega}. \quad (6.11)$$

И, наконец, найдем радиус-вектор нового начала системы отсчета R_0 , для которой будет выполняться соотношение (6.10):

$$r = R + r' = R_0 + r'_0, \\ R_0 = R + r' - r'_0 = R + d = R + \frac{[nV]}{\omega}. \quad (6.12)$$

Итак, плоское движение абсолютно твердого тела в течение бесконечно малого интервала времени можно представить, как "чистый" поворот относительно некоторой оси – **мгновенной оси вращения**.

На рис. 6.3 изображена векторная диаграмма скоростей материальных точек тела, лежащих в плоскости движения на одной прямой, проходящей через мгновенную ось вращения.

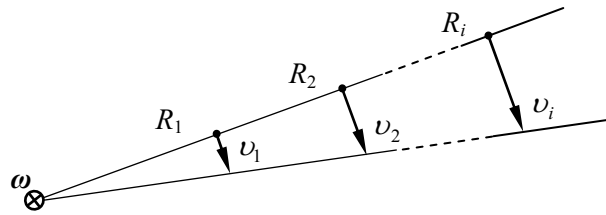


Рис. 6.3. Векторная диаграмма скоростей материальных точек абсолютно твердого тела при его плоском движении

Как видно на рис. 6.4, в этом случае выполняется соотношение:

$$\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \dots = \frac{v_i}{R_i}, \quad (6.13)$$

где v_i – скорость материальной точки абсолютно твердого тела, а R_i – расстояние от этой материальной точки до мгновенной оси вращения.

Мгновенная ось вращения – ось вращения, относительно которой в течение бесконечно малого интервала времени можно представить абсолютно твердого тела, как "чистый" поворот, т.е. представить скорость движения произвольной материальной точки тела в виде (6.10).

В общем случае положение мгновенной оси вращения изменяется относительно абсолютно твердого тела в выбранной системе отсчета – радиус-вектор R_0 , задающий положение мгновенной оси, является функцией времени (см. (6.12)).

Мгновенная ось вращения всегда перпендикулярна плоскости движения и проходит через неподвижную в данный момент времени материальную точку абсолютно твердого тела или точку пространства, которая жестко связана с этим абсолютно твердым телом.

Движение абсолютно твердого тела, закрепленного в точке

Если абсолютно твердое тело (тело отсчета системы S') закреплено в точке, покоящейся относительно системы S , то, совмещив начала отсчета обеих систем ($R = 0$, $V = 0$, $A = 0$), получим:

$$r = R + r', \quad (6.14)$$

$$v = [\omega r'], \quad (6.15)$$

$$a = [\dot{\omega} r'] + [\omega [\omega r']]. \quad (6.16)$$

Из уравнения (6.15) для скорости произвольной материальной точки абсолютно твердого тела, закрепленного в точке, следует теорема Эйлера.

Теорема Эйлера – абсолютно твердое тело, закрепленное в точке, может быть переведено из одного положения в любое другое одним поворотом вокруг неподвижной оси, проходящей через точку закрепления. Причем это утверждение справедливо как для бесконечно малого, так и для конечного поворота. Однако результат двух конечных поворотов зависит от их последовательности, в отличие от двух бесконечно малых поворотов.

Если система отсчета S_1 с общим началом с системой S вращается относительно нее с угловой скоростью Ω и абсолютно твердое тело, закрепленное в начале отсчета этих систем, вращается с угловой скоростью ω_1 относительно системы S_1 , то в соответствии с (6.5):

$$v = \underbrace{V}_{=0} + [\Omega r'] + v' = [\Omega r'] + [\omega_1 r'] = [\Omega + \omega_1, r'] = [\omega r'], \quad (6.17)$$

$$\omega = \Omega + \omega_1. \quad (6.18)$$

Здесь v – скорость материальной точки абсолютно твердого тела относительно системы S , ω – угловая скорость вращения абсолютно твердого тела относительно той же системы.

Как видим, угловая скорость ω вращения данного тела, закрепленного в точке относительно первой системы отсчета, будет равна сумме угловых скоростей второй системы отсчета ω_1 и тела относительно этой системы ω_2 .

Как и в случае плоского движения, движение абсолютно твердого тела, закрепленного в точке, можно представить как "чистый" поворот вокруг мгновенной оси вращения.

6.1.2. Динамика абсолютно твердого тела

Момент импульса L материальной точки относительно некоторой точки пространства – векторное произведение радиус-вектора r материальной точки относительно данной точки пространства на ее импульс p в заданной системе отсчета:

$$L = [rp]. \quad (6.19)$$

Момент импульса L механической системы относительно точки – сумма моментов импульсов L_i материальных точек, входящих в систему:

$$L = \sum_i L_i. \quad (6.20)$$

Найдем связь между моментом импульса механической системы L относительно произвольной неподвижной точки O и моментом импульса этой системы L_0 относительно ее центра масс O' в лабораторной системе отсчета (см. рис. 6.4).

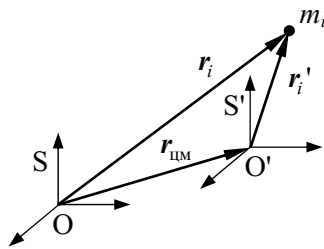


Рис. 6.4. Связь между радиус-векторами материальной точки в лабораторной системе отсчета S и системе центра масс S'

Радиус-вектор i -ой материальной точки r_i относительно точки O равен:

$$r_i = r_{\text{цм}} + r'_i, \quad (6.21)$$

где $r_{\text{цм}}$ – радиус-вектор центра масс относительно точки O , r'_i – радиус-вектор материальной точки системы относительно ее центра масс.

Момент импульса системы материальных точек относительно точки O в соответствии с (6.19) и (6.20) равен:

$$L = \sum_i \left[\mathbf{r}_i, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right]. \quad (6.22)$$

Преобразуем (6.22) с учетом (6.21):

$$\begin{aligned} L &= \sum_i \left[\mathbf{r}_{\text{цм}} + \mathbf{r}'_i, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \sum_i \left[\mathbf{r}_{\text{цм}}, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] + \sum_i \left[\mathbf{r}'_i, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \\ &= \sum_i [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_i] + \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i] = [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}}] + L_0 \equiv L_{\text{цм}} + L_0, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где $\mathbf{p}_i$ – импульс i -ой материальной точки механической системы, $\mathbf{p}_{\text{цм}} \equiv \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i$ – импульс центра масс этой системы, $L_0 \equiv \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i]$ – момент импульса механической системы относительно центра масс O' и $L_{\text{цм}} \equiv [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}}]$ – момент импульса центра масс механической системы относительно точки O , в лабораторной системе отсчета.

Введем поступательно движущуюся систему отсчета S' , начало которой O' совпадает с центром масс механической системы и осями, ориентированными параллельно осям лабораторной системы отсчета (см. рис. 6.4). В соответствии с принципом суперпозиции движений (см. п. 1.1 и формулу (1.26) в Главе 1) можно записать:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{цм}} + \mathbf{v}'_i, \quad (6.24)$$

В соответствии с (6.24) импульс i -ой материальной точки механической системы относительно лабораторной системы отсчета равен:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{\text{цм}} + \mathbf{p}'_i. \quad (6.25)$$

Подставляя (6.25) в (6.23), получаем:

$$\begin{aligned} L &= [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}}] + \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i] = [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}}] + \sum_i [\mathbf{r}'_i, m_i \mathbf{v}_{\text{цм}}] + \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}'_i] = \\ &= [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}}] + \left[\sum_i m_i \mathbf{r}'_i, \mathbf{v}_{\text{цм}} \right] + \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}'_i]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

В соответствии с определением центра масс (см. Главу 3) $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$, следовательно, выражение (6.26) для момента импульса

механической системы относительно произвольной неподвижной точки О принимает вид:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}}] + \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}'_i] = [\mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}}] + \mathbf{L}'_0, \quad (6.27)$$

$\mathbf{L}'_0 \equiv \sum_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}'_i]$ – момент импульса механической системы относительно центра масс О' в системе отсчета S'.

Таким образом, момент импульса механической системы относительно неподвижной точки в лабораторной системе отсчета равен сумме момента импульса центра масс этой системы относительно данной точки и момента импульса механической системы относительно ее центра масс. Заметим, что момент импульса механической системы относительно ее центра масс в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс одинаковы (ср. (6.23) с (6.27)).

Сформулированное утверждение справедливо для абсолютно твердого тела, поскольку оно является механической системой.

В случае вращения абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки скорость материальной точки и угловая скорость вращения тела связаны соотношением (6.15), следовательно, момент импульса относительно этой точки может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i, [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]] = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})) = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Здесь r_i – радиус-вектор i -ой материальной точки массой m_i , v_i –

ее скорость, $\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ – угловая скорость вращения тела и

$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$ – **тензор инерции абсолютно твердого тела**

относительно неподвижной точки.

Диагональные элементы тензора J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} называются **осевыми моментами инерции**, а недиагональные $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$ – **центробежными моментами инерции**. Осевые моменты инерции в соответствии с определением являются моментами инерции тела относительно соответствующих осей координат.

Поскольку тензор инерции тела является симметричным тензором, он обладает **главными осями инерции**, при записи в которых диагонализуется:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

В этом случае центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции J_x , J_y и J_z называются **главными моментами инерции тела**, при этом:

$$L_\alpha = J_\alpha \omega_\alpha, \quad (6.30)$$

где L_α и ω_α – составляющие момента импульса L и угловой скорости ω вдоль главных осей инерции ($\alpha = x, y, z$).

Заметим, что в случае сферической симметрии абсолютно твердого тела $J_x = J_y = J_z \equiv J$ и согласно (6.28) направления момента импульса тела и его угловой скорости вращения совпадают:

$$L = J\omega = J\omega. \quad (6.31)$$

Поскольку в системе центра масс S' абсолютно твердое тело вращается с угловой скоростью ω , его момент импульса относительно центра масс равен:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (6.32)$$

Здесь $\mathbf{J}_0$ – тензор инерции абсолютно твердого тела относительно его центра масс.

Следовательно, выражение для момента импульса механической системы относительно неподвижной точки в лабораторной системе отсчета равен:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{цм}} + \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (6.33)$$

Момент импульса L_n механической системы относительно некоторой оси – проекция на эту ось момента импульса относительно произвольной точки, лежащей на данной оси:

$$L_n = (\mathbf{n} \mathbf{L}), \quad (6.34)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, задающий направление оси.

Найдем связь между моментом импульса тела L_n относительно некоторой оси в заданной системе отсчета и моментом импульса тела $L_{0,n}$ относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной заданной оси, в системе отсчета, связанной с центром масс. Умножая скалярно на единичный вектор $\mathbf{n}$ левую и правую части соотношения $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{цм}} + \mathbf{L}_0$, получаем:

$$L_n = L_{\text{цм},n} + L_{0,n}, \quad (6.35)$$

где $L_{\text{цм},n}$ – момент импульса центра масс тела относительно заданной оси в лабораторной системе отсчета.

Точка приложения силы – материальная точка, на которую действует сила.

Момент силы относительно точки $\mathbf{M}$ – векторное произведение радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки приложения силы на силу $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{F}]. \quad (6.36)$$

Момент силы относительно оси M_n – проекция на эту ось момента силы относительно произвольной точки, лежащей на данной оси:

$$M_n = (\mathbf{n} \mathbf{M}). \quad (6.37)$$

Равнодействующая сил

В ряде случаев, когда несколько сил действует на абсолютно твердое тело, их действие можно заменить действием одной равнодействующей силы. Это возможно, поскольку движение абсолютно твердого тела определяется в общем случае совокупностью двух уравнений – уравнением движения центра масс тела и уравнением моментов относительно некоторой точки, неподвижной относительно инерциальной системы отсчета.

Понятие равнодействующей силы можно ввести только для совокупности сил, действующих на абсолютно твердое тело, если сумма этих сил не равна нулю и если существует точка пространства, относительно которой сумма моментов действующих на тело сил равна нулю.

Равнодействующая F_p совокупности сил $\{F_i\}$, действующих на абсолютно твердое тело, – сила, равная сумме этой совокупности сил $F_p = \sum_i F_i$; точка приложения равнодействующей

силы совпадает с точкой, относительно которой сумма моментов этих сил равна нулю. Точка приложения равнодействующей силы не обязательно должна совпадать с одной из материальных точек тела, на которое действует совокупность сил.

Под силой инерции, действующей на произвольно движущееся абсолютно твердое тело, в дальнейшем понимается равнодействующая сил инерции для материальных точек этого тела (см. Главу 4) в неинерциальной системе отсчета, которая движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета. В этом случае равнодействующая сил инерции приложена к центру масс тела.

Центр тяжести тела – точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на материальные точки этого тела при его произвольной ориентации в однородном поле сил тяжести (например, вблизи земной поверхности). Центр тяжести тела определяется только распределением массы в этом теле и может не совпадать ни с одной из материальных точек данного тела.

Уравнения движения абсолютно твердого тела – уравнение движения центра масс (см. Главу 3) и уравнение моментов для этого тела относительно инерциальной системы отсчета.

Уравнение моментов (закон изменения момента импульса) для механической системы относительно точки – скорость изменения момента импульса системы L относительно данной точки в инерциальной системе отсчета равна сумме моментов внешних сил M^{ex} , действующих на систему:

$$\frac{dL}{dt} = M^{\text{ex}}, \quad (6.38)$$

где $M^{\text{ex}} = \sum_i M_i^{\text{ex}} = \sum_i [r_i F_i^{\text{ex}}]$.

Уравнение моментов (закон изменения момента импульса) для механической системы относительно неподвижной оси – скорость изменения момента импульса системы L_n относительно данной оси в инерциальной системе отсчета равна сумме моментов внешних сил M_n^{ex} , действующих на систему:

$$\frac{dL_n}{dt} = M_n^{\text{ex}}. \quad (6.39)$$

Момент инерции тела относительно оси – физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадрат расстояния их до оси:

$$J = \sum_i m_i r_i^2. \quad (6.40)$$

В случае непрерывного распределения в пространстве массы тела, расчет момента инерции тела сводится к вычислению интеграла:

$$J = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (6.41)$$

где r – расстояние от элемента тела объемом dV и массой dm , ρ – плотность тела.

Теорема Гюйгенса – Штейнера – момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела J_0 относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (6.42)$$

Вычислим моменты инерции однородных тонкого стержня, цилиндра и шара относительно осей, проходящих через их центры масс.

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню, в соответствии с (6.41) равен:

$$J_{\text{ст}} = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{12}, \quad (6.43)$$

где m – масса стержня, l – его длина, x – декартова координата материальной точки стержня с началом отсчета в центре стержня.

Момент инерции однородного цилиндра (диска) относительно его оси в соответствии с (6.41) равен:

$$J_{\text{ц}} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r d\varphi dr dz = \frac{mR^2}{2}, \quad (6.44)$$

где m , R и L – масса, радиус и длина цилиндра, r и z – цилиндрические координаты материальной точки цилиндра.

Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр, в соответствии с (6.41) равен:

$$J_{\text{ш}} = \int_0^\pi \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta)^2 \rho r^2 \sin \vartheta d\varphi dr d\vartheta = \frac{2}{5} mR^2, \quad (6.45)$$

где m и R – масса и радиус шара, r , φ и ϑ – сферические координаты материальной точки шара.

Плоское движение абсолютно твердого тела

Если в качестве оси вращения выбрать ось n , проходящую через центр масс абсолютно твердого тела, то его уравнениями движения будут:

- уравнение движения центра масс (см. Главу 3)

$$m\mathbf{a}_{\text{цм}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}; \quad (6.46)$$

- уравнение моментов относительно оси n , проходящей через центр масс

$$J_{0,n} \frac{d\omega}{dt} = M_{0,n}^{\text{ex}}. \quad (6.47)$$

Здесь m – масса тела, $a_{\text{цм}}$ – ускорение центра масс тела, F^{ex} – сумма всех внешних сил, действующих на тело, $J_{0,n}$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения, ω – угловая скорость вращения тела относительно этой оси, $M_{0,n}^{\text{ex}}$ – сумма моментов внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси.

Вращательное движение абсолютно твердого тела

В случае вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной относительно инерциальной системы отсчета оси уравнением движения тела будет **уравнение моментов** для этого тела относительно данной оси, которое принимает вид:

$$J_n \frac{d\omega}{dt} = M_n^{\text{ex}}, \quad (6.48)$$

где J_n – момент инерции тела относительно оси, ω – угловая скорость вращения тела, M_n^{ex} – сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

Заметим, что при рассмотрении плоского движения абсолютно твердого тела в ряде случаев удобно записывать уравнение моментов (6.45) относительно неподвижной оси, совпадающей в данный момент времени с мгновенной осью вращения.

6.2. Основные типы задач и методы их решения

6.2.1. Классификация задач кинематики и динамики абсолютно твердого тела

Большинство задач кинематики и динамики твердого тела можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям.

1. Кинематика абсолютно твердого тела:

- а) определение линейной скорости некоторой точки твердого тела,
- б) определение угловой скорости вращения для плоского движения твердого тела,
- в) определение мгновенной оси вращения при плоском движении,

г) определение угловой скорости вращения твердого тела при сложном (не плоском) движении твердого тела.

2. Динамика абсолютно твердого тела:

а) определение углового ускорения при плоском движении твердого тела,

б) определение ускорения центра масс твердого тела при одновременном вращательном и поступательном плоском движении твердого тела,

в) определение сил взаимодействия между твердыми телами при их движении (силы трения, силы упругости).

6.2.2. Общая схема решения задач кинематики и динамики абсолютно твердого тела

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат, а также точку (ось), относительно которой будет рассматриваться вращение тела (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить на чертеже все необходимые силы и кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел (если это не сделано в условии задачи) и рассмотреть особенности их движения.
5. Провести анализ действующих на тела системы сил и их моментов относительно выбранной точки (оси) вращения.

II. Записать полную систему уравнений по отношению к искомым величинам.

1. Записать уравнения движения для тел системы в выбранной системе отсчета.
2. Записать уравнения моментов для тел системы относительно выбранных осей.
3. Записать законы, описывающие индивидуальные свойства сил.
4. Записать моменты сил, действующих на тела системы.
5. Записать моменты инерции тел относительно выбранных осей вращения.

6. Записать уравнения кинематической связи.
7. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечание.

В задачах на кинематику движения абсолютно твердого тела п. I.5 и пп. II.1 – II.5 можно опустить.

6.3. Примеры решения задач

6.3.1. Кинематика абсолютно твердого тела

Задача 6.1

Колесо радиусом R катится с проскальзыванием по горизонтальной поверхности. Модуль скорости верхней точки обода колеса А, лежащей на вертикальном диаметре, равен v_A . Модуль скорости точки обода колеса В, лежащей на горизонтальном диаметре, равен $v_B = 5v_A$. Определить угловую скорость вращения колеса ω , скорость движения его центра v_0 и положение мгновенной оси вращения колеса М (рис. 6.5).

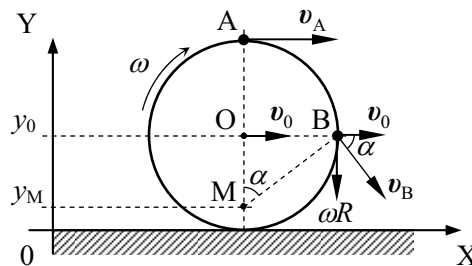


Рис. 6.5

Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Направим оси X и Y декартовой системы координат так, как показано на рис. 6.5.

Плоское движение колеса в течение бесконечно малого интервала времени можно представить, как "чистый" поворот относительно мгновенной оси вращения, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через точку пересечения прямых, перпендикулярных скоростям движения материальных точек колеса (см. п. 6.1. Теоретический материал). Поскольку при движении колеса не происходит его отрыва от горизонтальной поверхности, то скорость нижней точки обода колеса, которая соприкасается с поверхностью, может быть направлена только вдоль поверхности. Следовательно, мгновенная ось вращения проходит через одну из точек вертикального диаметра колеса. В общем случае мгновенная ось вращения может находиться как выше, так и ниже поверхности, по которой катится колесо.

Пусть y_M – координата мгновенной оси вращения (см. рис. 6.5) в лабораторной системе отсчета. Для удобства решения задачи введем вторую систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с центром колеса со скоростью v_0 относительно лабораторной системы, с осями координат, параллельными осям лабораторной системы координат X и Y .

II. При решении задачи воспользуемся формулой (6.2), связывающей скорости материальной точки в лабораторной и движущейся системах отсчета (см. п. 6.1. Теоретический материал). В движущейся со скоростью v_0 системе отсчета модули скоростей точек обода колеса A и B одинаковы и равны $|\omega R|$. Для модулей этих скоростей относительно лабораторной системы отсчета можно записать (см. рис. 6.5):

$$v_A = v_0 + \omega R, \quad (6.49)$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}. \quad (6.50)$$

Здесь и далее положительным значениям ω соответствует вращение колеса по часовой стрелке.

Воспользуемся очевидными геометрическими соотношениями (см. рис. 6.5):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega R}{v_0}, \quad (6.51)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{R - y_M}, \quad (6.52)$$

где α – угол между скоростью точки В и направлением движения центра колеса.

III. Преобразуя систему уравнений (6.49) и (6.50) получаем уравнение относительно угловой скорости вращения колеса ω :

$$\omega^2 - \omega \frac{v_A}{R} + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2R^2} = 0. \quad (6.53)$$

Решая полученное квадратное уравнение, получаем два значения угловой скорости:

$$\omega_{1,2} = \frac{v_A}{2R} \pm \frac{1}{2R} \sqrt{2v_B^2 - v_A^2}. \quad (6.54)$$

По условию задачи $v_B = 5v_A$, следовательно:

$$\omega_1 = 4 \frac{v_A}{R} \text{ и } \omega_2 = -3 \frac{v_A}{R}. \quad (6.55)$$

Согласно (6.49) этим значениям угловой скорости вращения колеса соответствуют два значения скорости центра колеса:

$$v_{01} = -3v_A \text{ и } v_{02} = 4v_A. \quad (6.56)$$

Используя (6.51) и (6.52) для координаты мгновенной оси вращения получаем следующее выражение:

$$y_M = R - \frac{v_0}{\omega}. \quad (6.57)$$

Подставляя (6.55) и (6.56) в (6.57), получаем два значения координаты мгновенной оси вращения:

$$y_{M1} = \frac{7}{4}R \text{ и } y_{M2} = \frac{7}{3}R. \quad (6.58)$$

Итак, задача имеет два решения.

1. Скорость центра колеса направлена в отрицательном направлении оси X, вращение колеса происходит по часовой стрелке, мгновенная ось вращения расположена на вертикальном диаметре ниже точки А, но выше центра колеса (см. рис. 6.6):

$$v_{01} = -3v_A, \quad \omega_1 = 4 \frac{v_A}{R}, \quad y_{M1} = \frac{7}{4}R.$$

2. Скорость центра колеса направлена в положительном направлении оси X, вращение колеса происходит против часовой стрелки, мгновенная ось вращения расположена выше точки A (см. рис. 6.7):

$$v_{02} = 4v_A, \quad \omega_2 = -3\frac{v_A}{R}, \quad y_{M2} = \frac{7}{3}R.$$

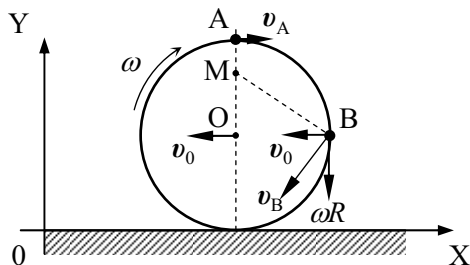


Рис. 6.6

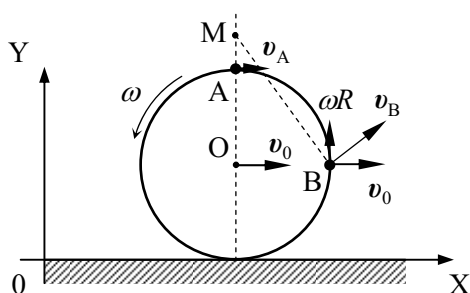


Рис. 6.7

Задача 6.2

Конус, высота которого $h = 4$ см и радиус основания $r = 3$ см, катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, имея неподвижную вершину в точке O (рис. 6.8).

Определить угловую скорость вращения конуса относительно лабораторной системы отсчета, связанной с поверхностью, если конус делает один оборот вокруг оси OZ за время $T = 3$ с.

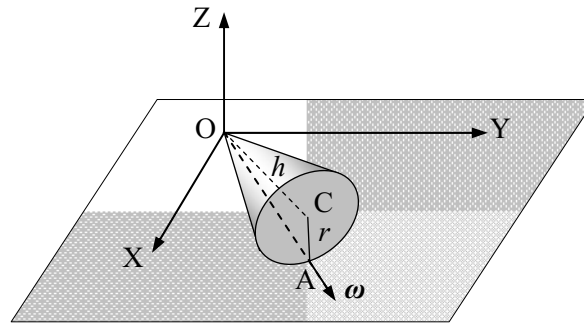


Рис. 6.8

Решение

I. В соответствии с условием задачи выберем лабораторную систему отсчета, жестко связанную с горизонтальной поверхностью. При этом ось Z системы направим перпендикулярно поверхности, а начало отсчета совместим с неподвижной вершиной конуса O (см. рис. 6.8).

В соответствии с принципом суперпозиции движений движение каждой материальной точки конуса (за исключением точек, лежащих на оси конуса OC) относительно выбранной лабораторной системы отсчета можно рассматривать как суперпозицию двух движений – вращение с угловой скоростью ω_1 вокруг оси конуса OC и вращение с угловой скоростью ω_2 вокруг оси Z . Точки, лежащие на прямой OA соприкосновения конуса с поверхностью, в данный момент времени покоятся, так как нет проскальзывания. Эта прямая является мгновенной осью вращения, вокруг которой конус вращается с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

II. Материальная точка C в центре основания конуса участвует только в одном движении – вращении вокруг оси Z с радиусом R (см. рис. 6.9). При этом ее скорость в соответствии с условием задачи равна:

$$v_C = \omega_2 R = \frac{2\pi}{T} R. \quad (6.59)$$

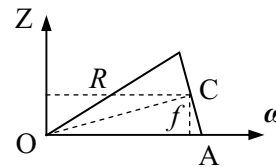


Рис. 6.9

Можно считать, что в течение бесконечно малого интервала времени точка C вращается вокруг мгновенной оси вращения OA с

угловой скоростью ω . Следовательно, скорость материальной точки С в центре основания конуса относительно лабораторной системы отсчета равна:

$$v_C = \omega f, \quad (6.60)$$

Как видно на рис. 6.9, для R и f выполняются следующие соотношения:

$$\frac{r}{f} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - f^2}}, \quad (6.61)$$

$$R = \sqrt{h^2 - f^2}. \quad (6.62)$$

III. Решая систему уравнений (6.59) и (6.60), получаем:

$$\omega = \frac{R}{f} \cdot \frac{2\pi}{T}. \quad (6.63)$$

Из (6.61) и (6.62) определяем R и f :

$$f = \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \quad R = \frac{h^2}{\sqrt{r^2 + h^2}}. \quad (6.64)$$

Искомая угловая скорость вращения конуса вокруг мгновенной оси относительно лабораторной системы отсчета равна:

$$\omega = \frac{h}{r} \cdot \frac{2\pi}{T} = 2,79 \text{ рад/с}. \quad (6.65)$$

Проанализируем полученный результат. В частности, убедимся, что выполняется соотношение между угловыми скоростями вращения конуса:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega. \quad (6.66)$$

Определим модуль угловой скорости ω_1 . Для этого воспользуемся тем, что точка А, лежащая на мгновенной оси вращения, участвует в двух движениях, при этом ее скорость относительно лабораторной системы отсчета равна нулю:

$$v = OA \cdot \omega_2 - \omega_1 r = 0. \quad (6.67)$$

Следовательно, угловая скорость вращения конуса вокруг оси OZ в соответствии с (6.67) и рис. 6.9 равна

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}. \quad (6.68)$$

Направления векторов ω_1 , ω_2 , и ω показаны на рис. 6.10.

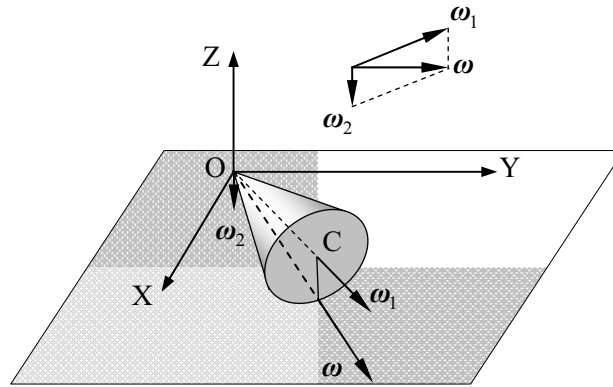


Рис. 6.10

Вектор ω_1 направлен вдоль оси конуса OC , ω_2 – вдоль оси Z лабораторной системы отсчета, ω – вдоль мгновенной оси вращения. Все три вектора лежат в одной плоскости и составляют прямоугольный треугольник (см. рис. 6.10). Используя соотношения (6.67) и (6.68), убеждаемся, что

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega_2^2 \left(\frac{h^2 + r^2}{r^2} - 1 \right) = \omega_2^2 \frac{h^2}{r^2} = \omega^2. \quad (6.69)$$

Задача 6.3

Два соосных колеса с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) вращаются в одну сторону с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$). Между колесами зажато третье колесо радиусом $r_3 = (r_2 - r_1)/2$, движущееся без проскальзывания (рис. 6.11). Найти угловую скорость ω вращения третьего колеса и скорость v_0 его центра.

Решение

I. Обозначим точки соприкосновения третьего колеса с первым и вторым точками В и А соответственно. Для третьего колеса, зажато между двумя вращающимися колесами, скорости точек А и В совпадают со скоростями точек, находящихся на ободах соответствующих колес (см. рис. 6.11).

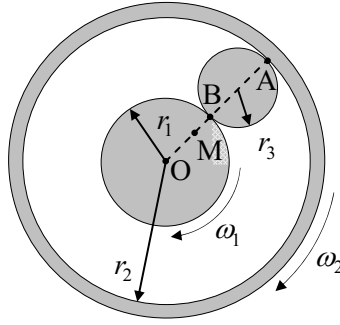


Рис. 6.11

II. Поскольку первое и второе колеса вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , скорости движения точек A и B при вращении этих колес равны:

$$v_A = \omega_2 r_2, \quad (6.70)$$

$$v_B = \omega_1 r_1. \quad (6.71)$$

При решении задачи удобно воспользоваться понятием мгновенной оси вращения для третьего колеса (см. п. 6.1. Теоретический материал), относительно которой колесо вращается с угловой скоростью ω . В данном случае эта ось перпендикулярна плоскости чертежа и пересекает прямую, проходящую через точки O, B и A. Пусть мгновенная ось вращения лежит между точками O и B на расстоянии r_x от точки O, тогда:

$$v_A = \omega(r_1 - r_x + 2r_3), \quad (6.72)$$

$$v_B = \omega(r_1 - r_x), \quad (6.73)$$

при этом для скорости центра третьего колеса можно записать:

$$v_0 = \omega(r_1 - r_x + r_3). \quad (6.74)$$

III. Решая систему уравнений (6.70) – (6.73) относительно угловой скорости вращения третьего колеса ω , получаем:

$$\omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{2r_3}. \quad (6.75)$$

Подставляя (6.75) в (6.74), получаем искомую скорость центра третьего колеса:

$$v_0 = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}. \quad (6.76)$$

6.3.2. Динамика абсолютно твердого тела

Задача 6.4

С наклонной поверхности клина с углом α при вершине скатывается без проскальзывания однородный шар массой m и радиусом R . Найти ускорение a центра шара.

Решение

I. При самопроизвольном скатывании шара по наклонной поверхности клина в сторону его ребра движение шара является плоским, поскольку все его материальные точки движутся в параллельных плоскостях. Мгновенная ось вращения в данный момент времени проходит через точку М (см. рис. 6.12)

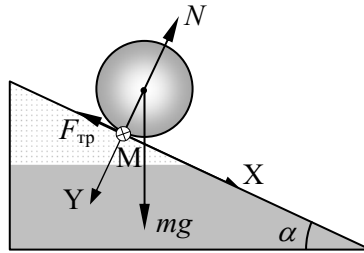


Рис. 6.12

соприкосновения шара с поверхностью параллельно ребру клина (перпендикулярно скорости центра масс шара).

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с наклонной поверхностью, ось X декартовой системы координат которой направлена вдоль наклонной поверхности клина, а ось Y – перпендикулярно, причем плоскость XY параллельна плоскостям, в которых движутся материальные точки шара (рис. 6.12).

На шар в процессе движения действуют три силы – сила тяжести mg , сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ (проскальзывания нет) и сила реакции опоры N (рис. 6.12).

II. Запишем уравнение вращательного движения (уравнение моментов (6.48)) для шара относительно неподвижной оси, совпадающей в данный момент времени с мгновенной осью вращения (см. рис. 6.12), в лабораторной инерциальной системе отсчета:

$$J \frac{d\omega}{dt} = mgR \sin \alpha, \quad (6.77)$$

где ω – угловая скорость вращения шара, J – момент инерции шара относительно мгновенной оси вращения. Моменты силы трения и силы нормальной реакции опоры относительно этой оси равны нулю.

Запишем также уравнение кинематической связи между ускорением центра масс a и угловым ускорением шара $\frac{d\omega}{dt}$ (вследствие движения шара без проскальзывания):

$$a = R \frac{d\omega}{dt}. \quad (6.78)$$

Момент инерции шара относительно мгновенной оси вращения найдем, используя теорему Гюйгенса-Штейнера (6.42):

$$J = J_0 + mR^2, \quad (6.79)$$

где J_0 – момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс (6.45), равный

$$J_0 = \frac{2}{5} mR^2. \quad (6.80)$$

III. Решая систему уравнений (6.77) – (6.79) относительно ускорения центра масс шара, получим:

$$a = \frac{1}{1 + \frac{J_0}{mR^2}} g \sin \alpha. \quad (6.81)$$

Учитывая выражение (6.80) для момента инерции шара, получаем искомое ускорение центра шара:

$$a = \frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad (6.82)$$

Определим условия, при которых полученный результат является верным. Для движения шара по поверхности клина без проскальзывания необходимо, чтобы сила трения в соответствии с за-

коном Амонтона–Кулона (см. п. 2.1.2 в Главе 2) удовлетворяла неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (6.83)$$

Здесь μ – коэффициент трения.

Модули сил трения и нормальной реакции опоры можно найти из уравнения движения шара, записанного в проекциях на оси X и Y выбранной системы координат (см. рис. 6.12):

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (6.84)$$

$$0 = mg \cos \alpha - N. \quad (6.85)$$

Решая систему двух уравнений (6.84) – (6.85) и одного неравенства (6.83) с учетом найденного ускорения центра шара (6.82), получаем условие качения шара без проскальзывания по наклонной поверхности клина:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} \mu. \quad (6.86)$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{5}{7} g \sin \alpha \text{ при } \operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{7}{2}.$$

Задача 6.5

На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой m_1 и на ней – однородный шар массой m_2 . К доске приложили постоянную горизонтальную силу F . С какими ускорениями будут двигаться доска a_1 и центр шара a_2 в отсутствие скольжения между ними?

Решение

I Введем лабораторную инерциальную систему отсчета, оси X и Y декартовой системы координат которой направлены так, как показано на рис. 6.13. При движении шара по доске вдоль горизонтальной поверхности в направлении силы F движение шара является плоским.

В лабораторной системе отсчета движение шара будем рассматривать как суперпозицию его поступательного движения и вращения шара относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр масс.

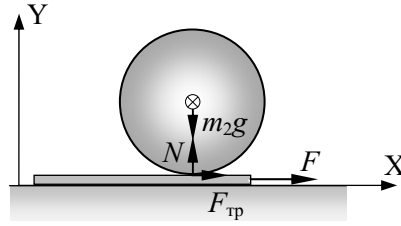


Рис. 6.13

II. Уравнение движения центра масс шара (совпадающего с его геометрическим центром) в проекциях на оси X и Y лабораторной системы координат имеют вид:

$$m_2 a_2 = F_{\text{тр}}, \quad (6.87)$$

$$0 = N - m_2 g, \quad (6.88)$$

где $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения покоя, действующей на шар со стороны доски, N – модуль силы нормальной реакции доски, действующей на шар.

Доска движется с ускорением a_1 в направлении оси X под действием силы F и силы трения со стороны шара, модуль которой в соответствии с третьим законом Ньютона равен модулю $F_{\text{тр}}$ силы трения покоя, действующей на шар со стороны доски.

Уравнение движения доски относительно лабораторной инерциальной системы отсчета в проекции на ось X имеет вид:

$$m_1 a_1 = F - F_{\text{тр}}. \quad (6.89)$$

Уравнение моментов (6.47) для шара запишем относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскостям движения всех материальных точек шара:

$$J_0 \beta = F_{\text{тр}} R, \quad (6.90)$$

где J_0 – момент инерции шара относительно данной оси, $\beta = \frac{d\omega}{dt}$

– угловое ускорение шара. В (6.90) учтено, что моменты сил тяжести и нормальной реакции доски равны нулю, поскольку линии их действия проходят через ось вращения.

Дополним систему уравнений движения шара и доски (6.87) – (6.90) уравнением кинематической связи, которое следует из условия отсутствия проскальзывания между шаром и доской:

$$a_2 = a_1 - \beta R. \quad (6.91)$$

Учтем также, что момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр масс (6.45) равен:

$$J_0 = \frac{2}{5} mR^2. \quad (6.92)$$

III. Решая систему уравнений (6.87), (6.89) – (6.92), получаем искомые ускорения доски и центра шара:

$$a_1 = \frac{7F}{7m_1 + 2m_2}, \quad (6.93)$$

$$a_2 = \frac{2F}{7m_1 + 2m_2}. \quad (6.94)$$

Определим условия, при которых движение шара будет происходить без проскальзывания. Для движения шара по доске без проскальзывания необходимо, чтобы сила трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона (см. п. 2.1.2 в Главе 2) удовлетворяла неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (6.95)$$

Здесь μ – коэффициент трения.

Модули сил трения и нормальной реакции опоры находим из уравнения движения шара, записанного в проекциях на оси X и Y выбранной системы координат (6.87) и (6.88) и подставляем в неравенство (6.95). В результате с учетом найденного ускорения центра шара (6.94) получим:

$$F \leq \mu g \frac{7m_1 + 2m_2}{2}. \quad (6.96)$$

Ответ:

$$a_1 = \frac{7F}{7m_1 + 2m_2} \text{ и } a_2 = \frac{2F}{7m_1 + 2m_2} \text{ при } F \leq \mu g \frac{7m_1 + 2m_2}{2}.$$

Задача 6.6

Система тел, состоящая из двух грузов, связанных между собой с помощью невесомой нерастяжимой нити, и двух одинаковых блоков, изображена на рис. 6.14. Ось левого блока закреплена, а правый блок свободно лежит на нити. При движении тел системы не происходит проскальзывания нити относительно поверхностей блоков. Считая заданными массы грузов m_1 и m_2 , массы блоков M и их радиусы R , определить ускорения грузов a_1 и a_2 , а также разно-

сти сил натяжения нитей по обе стороны каждого из блоков. Трением в оси блока пренебречь.

Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с точкой подвеса оси левого блока, оси X и Y декартовой системы координат которой изображены на рис. 6.14. В рассматриваемой системе оба груза и незакрепленный блок движутся поступательно вдоль оси X , при этом блоки вращаются вокруг собственных осей под действием сил тяжести (m_1g , m_2g , Mg) и сил натяжения нитей (T_1 , T_2 , T_3 и T_4). Поскольку массы блоков по условию задачи отличны от нуля, то силы натяжения нити слева и справа от блоков различны.

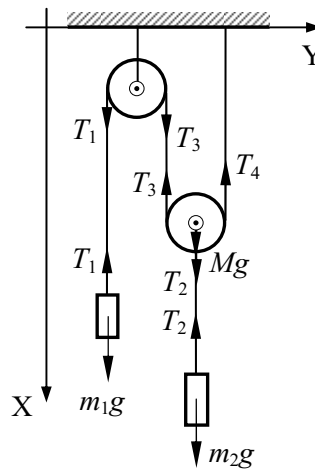


Рис. 6.14

II. Запишем уравнения движения грузов и центра масс незакрепленного блока в проекции на ось X выбранной системы координат:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (6.97)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad (6.98)$$

$$M a_2 = Mg + T_2 - T_3 - T_4. \quad (6.99)$$

Уравнения моментов для вращающихся блоков относительно осей, проходящих через их центры масс (см. рис. 6.14), имеют вид:

$$J_0 \beta_1 = T_1 R - T_3 R, \quad (6.100)$$

$$J_0 \beta_2 = T_4 R - T_3 R, \quad (6.101)$$

где β_1 и β_2 – угловые ускорения блоков, моменты инерции J_0 которых относительно указанных осей равны (6.44):

$$J_0 = \frac{MR^2}{2}. \quad (6.102)$$

Дополним полученную систему уравнений уравнениями кинематических связей, следующими из условий нерастяжимости нитей и отсутствия проскальзывания нитей по блокам:

$$a_1 + 2a_2 = 0, \quad (6.103)$$

$$a_1 = \beta_1 R, \quad (6.104)$$

$$\beta_1 = -\beta_2. \quad (6.105)$$

В результате получена полная система уравнений для девяти неизвестных величин: a_1 , a_2 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , β_1 , β_2 и J_0 .

III. Выразим все силы натяжения нитей через ускорение a_1 , используя уравнения (6.97), (6.98) и (6.100) – (6.105):

$$T_1 = m_1 g - m_1 a_1, \quad (6.106)$$

$$T_2 = m_2 g - \frac{m_2}{2} a_1, \quad (6.107)$$

$$T_3 = m_1 g - \left(m_1 + \frac{M}{2} \right) a_1, \quad (6.108)$$

$$T_4 = m_1 g - (m_1 + M) a_1. \quad (6.109)$$

Нетрудно видеть, что искомые разности сил натяжения нитей по обе стороны каждого из блоков равны:

$$T_1 - T_3 = T_3 - T_4 = \frac{M}{2} a_1. \quad (6.110)$$

Подставляя (6.106) – (6.109) в уравнение (6.99) находим искомое ускорение первого груза в проекции на ось X:

$$a_1 = \frac{4m_1 - 2m_2 - 2M}{4m_1 + m_2 + 4M} g. \quad (6.111)$$

Используя уравнение кинематической связи (6.103), получим искомое ускорение второго груза также в проекции на ось X:

$$a_2 = \frac{m_2 + M - 2m_1}{4m_1 + m_2 + 4M} g. \quad (6.112)$$

Искомые разности сил натяжения нитей (6.110) с учетом (6.111) равны:

$$T_1 - T_3 = T_3 - T_4 = \frac{2m_1 - m_2 - M}{4m_1 + m_2 + 4M} Mg. \quad (6.113)$$

Задача 6.7

В системе тел, показанной на рис. 6.15, известны масса груза m_1 , масса ступенчатого блока m_2 , момент инерции блока J_0 относительно его оси и радиусы ступеней блока R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Масса

нитей пренебрежимо мала. Найти ускорения груза a_1 и центра масс блока a_2 в лабораторной системе отсчета.

Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с потолком (см. рис. 6.15), ось Y декартовой системы координат которой направим вертикально вниз. В зависимости от соотношения между массами тел системы блок может как в положительном, так и в отрицательном направлении оси Y , совершая при этом чисто вращательное движение относительно мгновенной оси вращения. Поскольку нить, прикрепленная к потолку, нерастяжима, то мгновенная ось вращения блока проходит через точку A соприкосновения блока и этой нити. При этом мгновенная ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа, а ее выбранное положительное направление указано на рис. 6.15.

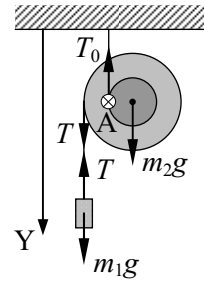


Рис. 6.15

II. Уравнение движения груза в проекции на ось Y (см. рис. 6.15) имеет вид:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T, \quad (6.114)$$

где T – сила натяжения нити, на которой подвешен груз.

Уравнение вращательного движения (уравнение моментов) блока запишем относительно мгновенной оси вращения в лабораторной инерциальной системе отсчета:

$$J\beta = m_2 g R - T(R_2 - R_1). \quad (6.115)$$

Здесь J – момент инерции блока относительно мгновенной оси, β – угловое ускорение блока. В (6.114) учтено, что момент силы натяжения T_0 верхней нити, прикрепленной к потолку (рис. 6.15), относительно мгновенной оси вращения равен нулю.

Момент инерции блока относительно мгновенной оси выразим через заданный в условии задачи момент инерции J_0 относительно его оси в соответствии с теоремой Гюйгенса-Штейнера (6.42):

$$J = J_0 + m_2 R_1^2. \quad (6.116)$$

Дополним уравнения (6.114) – (6.116) уравнениями кинематической связи, которые следуют из условия нерастяжимости нитей:

$$a_1 = -\beta(R_2 - R_1), \quad (6.117)$$

$$a_2 = \beta R_1. \quad (6.118)$$

III. Решая систему уравнений (6.114) – (6.118), получаем выражения для искомых ускорений груза a_1 и центра масс блока a_2 :

$$a_1 = \frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0} (R_2 - R_1), \quad (6.119)$$

$$a_2 = -\frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0} R_1. \quad (6.120)$$

Как видим, ускорения груза и центра блока направлены противоположно при любом соотношении масс груза и блока (см. (6.119) и (6.120)), при этом каждое из тел изначально покоящейся системы может как опускаться, так и подниматься в зависимости от соотношения масс тел системы и радиусов ступеней блока.

Если $\frac{m_1}{m_2} > \frac{R_1}{R_2 - R_1}$, то груз будет опускаться с ускорением a_1 (6.119), а центр блока будет подниматься с ускорением $a_2 = -a_1 \frac{R_1}{R_2 - R_1}$, модуль которого может быть как больше (при $R_2 < 2R_1$), так и меньше ($R_2 > 2R_1$) модуля ускорения груза a_1 .

При обратном соотношении масс груз будет подниматься, а центр блока опускаться с тем же соотношением ускорений.

Заметим, что в частном случае равенства радиусов ступеней блока $R_2 = R_1$ вне зависимости от соотношения масс груза и блока ускорение груза a_1 равно нулю, а ускорение центра блока направлено вниз и равно $a_2 = \frac{m_2 R_1^2}{m_2 R_1^2 + J_0} g$. Для цилиндрического одно-

родного блока $J_0 = \frac{1}{2} m_2 R_1^2$ и ускорение его центра будет равно $a_2 = \frac{2}{3} g$.

Задача 6.8

На лежащую на горизонтальной поверхности катушку массой $m = 100$ г и моментом инерции $J_0 = 400$ г·см² относительно ее оси намотана невесомая нерастяжимая нить. Внешний радиус катушки равен $R = 4$ см, а внутренний – $r = 1$ см. К концу нити под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтальной поверхности приложена сила $F = 0.2$ Н (см. рис. 6.16).

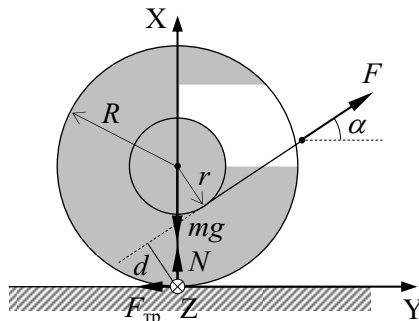


Рис. 6.16

Найти ускорение центра масс катушки a для случая, когда катушка движется в горизонтальном направлении без проскальзывания и величину коэффициента трения, при котором такое движение возможно.

Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, оси X , Y и Z декартовой системы координат которой направлены так, как показано на рис. 6.16. Поскольку движение катушки является плоским, то существует мгновенная ось вращения, направленная перпендикулярно параллельным плоскостям, в которых двигаются материальные точки катушки. В отсутствие проскальзывания мгновенная ось вращения проходит через точки соприкосновения катушки с горизонтальной поверхностью. Зададим в качестве положительного направления оси вращения положительное направление оси Z выбранной системы координат, начало отсчета которой совпадает с одной из точек соприкосновения (рис. 6.16).

II. Запишем систему уравнений движения катушки вместе с намотанной на нее невесомой нитью относительно лабораторной

инерциальной системы отсчета, в которую войдут уравнение вращательного движения вокруг мгновенной оси вращения и уравнение движения центра масс катушки в проекциях на оси X и Y выбранной системы координат:

$$J \frac{d\omega}{dt} = Fd, \quad (6.121)$$

$$0 = N - mg + F \sin \alpha. \quad (6.122)$$

$$ma = F \cos \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (6.123)$$

Здесь J – момент инерции катушки относительно мгновенной оси вращения, ω – угловая скорость вращения катушки, d – кратчайшее расстояние от мгновенной оси вращения до линии действия силы F (плечо силы F), $F_{\text{тр}}$ – сила трения покоя, действующая на катушку со стороны горизонтальной поверхности, N – сила нормальной реакции опоры.

Уравнения (6.121) – (6.123) дополним уравнением кинематической связи (в силу отсутствия проскальзывания при движении катушки), теоремой Гюйгенса-Штейнера (6.42) для момента инерции J и очевидным геометрическим соотношением (см. рис. 6.16):

$$a = \frac{d\omega}{dt} R, \quad (6.124)$$

$$J = J_0 + mR^2. \quad (6.125)$$

$$\frac{d}{\cos \alpha} + \frac{r}{\cos \alpha} = R. \quad (6.126)$$

Для определения коэффициента трения, при котором возможно движение без проскальзывания, в соответствии с законом Амонтона–Кулона (см. п. 2.1.2 в Главе 2) запишем:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (6.127)$$

III. Решая систему уравнений (6.121) – (6.126) относительно искомого ускорения центра масс катушки a , получаем:

$$a = \frac{FR^2}{J_0 + mR^2} \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right). \quad (6.128)$$

Для отсутствия проскальзывания катушки относительно горизонтальной поверхности коэффициент трения должен удовлетворять неравенству:

$$\mu \geq \frac{F}{mg - F \sin \alpha} \cdot \frac{J_0 \cos \alpha + mrR}{J_0 + mR^2}. \quad (6.129)$$

Проанализируем полученный результат. В соответствии с (6.128) направление ускорения $\mathbf{a}$ определяется знаком выражения $\left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right)$. В том случае, когда точка пересечения линии действия силы F и оси Y лежит левее начала отсчета системы координат, катушка будет двигаться слева направо, поскольку $\cos \alpha - \frac{r}{R} > 0$. В противном случае качение будет происходить справа налево.

Подставляя численные значения физических величин, заданные в условии задачи, получим для ускорения центра масс катушки и коэффициента трения:

$$a = 0.4 \text{ м/с}^2, \mu \geq 0,075.$$

Задача 6.9

Оси сплошного и тонкостенного цилиндров соединены невесомой штангой. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании α (см. рис. 6.17). Радиусы цилиндров одинаковы и равны R , при этом масса сплошного цилиндра равна m_1 , а тонкостенного – m_2 . Найти угол α , при котором цилиндры будут скатываться без проскальзывания.

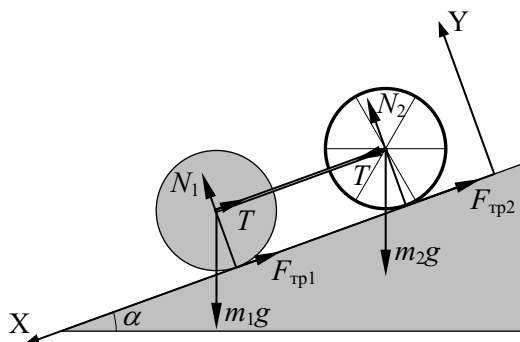


Рис. 6.17

Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с клином, оси X и Y декартовой системы координат которой изображены на рис. 6.17. На цилиндры в процессе их плоского движения действуют силы тяжести m_1g и m_2g , силы трения $F_{\text{тр}1}$ и $F_{\text{тр}2}$, силы нормальной реакции опоры N_1 и N_2 , а также силы реакции штанги T (см. рис. 6.17).

II. Запишем уравнения движения центров масс цилиндров в проекции на оси X и Y выбранной системы координат:

$$m_1a = m_1g \sin \alpha - T - F_{\text{тр}1}, \quad (6.130)$$

$$m_2a = m_2g \sin \alpha + T - F_{\text{тр}2}, \quad (6.131)$$

$$0 = N_1 - m_1g \cos \alpha, \quad (6.132)$$

$$0 = N_2 - m_2g \cos \alpha, \quad (6.133)$$

При записи уравнений (6.130) и (6.131) учтено, что силы реакции штанги T , действующие на цилиндры, равны по модулю. Это легко доказать, используя уравнение движения невесомой штанги в проекции на ось X и третий закон Ньютона. Ускорения центров масс a цилиндров также равны, поскольку штангу считаем абсолютно твердым телом.

Уравнения моментов для цилиндров относительно осей вращения, проходящих через их центры масс, имеют вид (см. (6.47)):

$$J_1\beta = F_{\text{тр}1}R, \quad (6.134)$$

$$J_2\beta = F_{\text{тр}2}R. \quad (6.135)$$

Здесь J_1 и J_2 – моменты инерции сплошного и тонкостенного цилиндров относительно осей, проходящих через их центры масс соответственно; β – угловое ускорение, одинаковое для сплошного и тонкостенного цилиндров в силу уравнения кинематической связи, которое следует из условия качения цилиндра без проскальзывания:

$$\beta R = a. \quad (6.136)$$

Воспользуемся известными выражениями для моментов инерции однородных сплошного (6.44) и тонкостенного цилиндров относительно осей, проходящих через их центры масс:

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2}, \quad (6.137)$$

$$J_2 = m_2 R^2. \quad (6.138)$$

В соответствии с законом Амонтона–Кулона (см. п. 2.1.2 в Главе 2) для сил трения покоя, действующих на цилиндры, справедливы неравенства:

$$F_{\text{тр}1} \leq \mu N_1. \quad (6.139)$$

$$F_{\text{тр}2} \leq \mu N_2. \quad (6.140)$$

III. Воспользовавшись соотношениями (6.130) – (6.138), выразим силы нормальной реакции наклонной поверхности клина и сил трения покоя со стороны этой поверхности на оба цилиндра через величины, заданные в условии задачи, и искомый угол при основании клина α :

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha, \quad (6.141)$$

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha, \quad (6.142)$$

$$F_{\text{тр}1} = \frac{m_1 + m_2}{3m_1 + 4m_2} m_1 g \sin \alpha, \quad (6.143)$$

$$F_{\text{тр}2} = \frac{2(m_1 + m_2)}{3m_1 + 4m_2} m_2 g \sin \alpha. \quad (6.144)$$

Подставляя выражения (6.141) – (6.144) в неравенства (6.139) и (6.140), получим условия, при которых качение цилиндров происходит без проскальзывания:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{3m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2}, \quad (6.145)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{3m_1 + 4m_2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (6.146)$$

Поскольку правая часть неравенства (6.146) меньше правой части неравенства (6.145) при любых значениях коэффициента трения μ и масс цилиндров m_1 и m_2 , то искомая область значений угла при основании клина α , при которых цилиндры будут скатываться без проскальзывания, определяется неравенством (6.146).

В соответствии с (6.146) область возможных значений угла α однозначно определяется отношением масс цилиндров при заданном значении коэффициента трения μ :

$$\alpha \leq \operatorname{arctg} \left(\mu \frac{3m_1 / m_2 + 4}{2(m_1 / m_2 + 1)} \right). \quad (6.147)$$

На рис. 6.18 изображен график зависимости предельной величины $\operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} / \mu$ от отношения массы сплошного цилиндра к массе тонкостенного m_1 / m_2 .

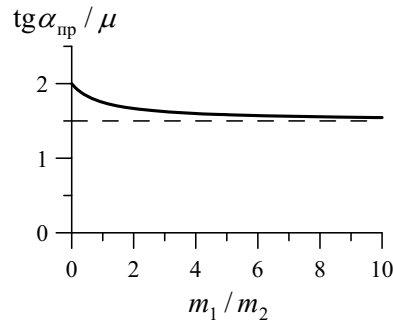


Рис. 6.18

Как видим, область значений угла α , при которых цилиндры будут скатываться без проскальзывания, ограничена сверху предельным значением $\alpha_{\text{пр}}$, которое равно $\operatorname{arctg}(2\mu)$ при $m_1 \ll m_2$ и асимптотически стремится к значению $\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\mu\right)$ при неограниченном увеличении отношения масс цилиндров m_1 / m_2 (рис. 6.18).

Задача 6.10

Цилиндрическая шайба радиусом $r = 3$ см касается борта гладкой горизонтальной площадки, имеющей форму круга радиусом $R = 10$ м. Шайбе придали скорость $v_0 = 30$ м/с, направленную вдоль борта. Коэффициент трения между бортом и шайбой равен $\mu = 0,1$. Определить модуль скорости шайбы v_k после того, как прекратится проскальзывание между бортом и шайбой, а также интервал времени t_k , через который это произойдет.

Решение

I. Движение шайбы рассматриваем относительно лабораторной инерциальной системы отсчета, жестко связанной с горизонтальной площадкой. Уравнение движения центра масс шайбы будем записывать в проекциях на нормальную $\mathbf{n}$ и тангенциальную

τ оси (см. п. 1.1. Теоретический материал в Главе 1), связанные с центром движущейся шайбы (см. рис. 6.19).

При плоском движении шайбы вдоль борта площадки на нее действуют сила нормальной реакции N и сила трения $F_{\text{тр}}$ со стороны борта. При этом момент силы трения относительно оси, проходящей через центр масс шайбы, вызывает ее вращение вокруг указанной оси. Скорость центра масс шайбы будет уменьшаться, а угловая скорость ее вращения – увеличиваться, до тех пор, пока не прекратится проскальзывание шайбы о борт площадки. Начиная с этого момента сила трения шайбы о борт равна нулю, а модуль скорости центра масс шайбы не изменяется.

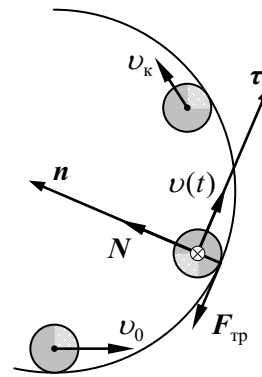


Рис. 6.19

II. Запишем уравнение движения центра масс шайбы относительно лабораторной системы отсчета в проекциях на выбранные нормальную n и тангенциальную τ оси:

$$ma_n = N, \quad (6.148)$$

$$ma_\tau = -F_{\text{тр}}. \quad (6.149)$$

Нормальная и тангенциальная проекции ускорения центра масс шайбы определяются соотношениями (см. п. 1.1. Теоретический материал в Главе 1):

$$a_n = \frac{v^2}{R-r}, \quad (6.150)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (6.151)$$

где v – модуль скорости центра масс шайбы и $(R-r)$ – радиус кривизны его траектории.

Уравнение моментов (6.47) для вращающейся шайбы относительно оси, проходящей через ее центр масс, имеет вид:

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} r. \quad (6.152)$$

Момент инерции шайбы относительно указанной оси (6.44) равен:

$$J_0 = \frac{mr^2}{2}. \quad (6.153)$$

На начальном этапе ($t < t_k$) шайба движется с проскальзыванием и на нее в соответствии с законом Амонтона – Кулона (см. п. 2.1.2.В в Главе 2) действует сила трения скольжения, равная:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (6.154)$$

Запишем уравнение кинематической связи между угловой скоростью вращения и скоростью центра масс шайбы после прекращения проскальзывания (при $t \geq t_k$):

$$v = r\omega. \quad (6.155)$$

III. Воспользовавшись соотношениями (6.148) – (6.151) и (6.154), получим дифференциальное уравнение для модуля скорости центра масс шайбы на начальном этапе движения шайбы ($t < t_k$):

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R-r}. \quad (6.156)$$

Решаем уравнение (6.156) с помощью метода разделения переменных:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R-r} \int_0^t dt, \quad (6.157)$$

$$v(t) = v_0 \frac{R-r}{R-r + v_0 \mu t}. \quad (6.158)$$

Связь угловой скорости вращения шайбы с модулем скорости ее центра масс получаем из (6.148) – (6.154):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\mu}{r(R-r)} v^2, \quad (6.159)$$

Подставляя (6.158) в (6.159), получаем:

$$\omega(t) = \frac{2\mu v_0^2 (R-r)}{r} \int_0^t \frac{1}{(R-r + v_0 \mu t)^2} dt. \quad (6.160)$$

В результате угловая скорость шайбы на начальном этапе ее движения равна:

$$\omega(t) = \frac{2v_0^2 \mu t}{r(R-r + v_0 \mu t)}. \quad (6.161)$$

В соответствии с (6.158) модуль скорости центра масс шайбы уменьшается от значения v_0 (при $t = 0$), в то время как угловая скорость вращения шайбы увеличивается по закону (6.161). В момент прекращения проскальзывания (через интервал времени t_k после сообщения шайбе скорости v_0) угловая скорость вращения шайбы и модуль скорости ее центра масс связаны уравнением кинематической связи (6.157).

На рис. 6.20 представлены зависимости модуля скорости центра масс шайбы v и произведения угловой скорости вращения шайбы на ее радиус ωr .

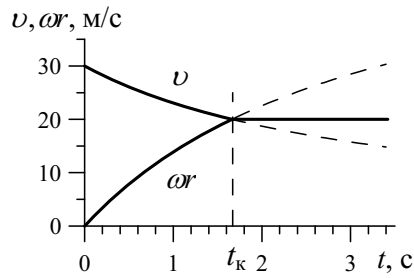


Рис. 6.20

Графики представленных зависимостей пересекаются в момент времени t_k (см. рис. 6.20). Подставляя (6.158) (6.161) в уравнение (6.157) получаем значение интервала времени t_k :

$$t_k = \frac{R - r}{2\mu v_0}. \quad (6.162)$$

После прекращения проскальзывания при дальнейшем движении шайбы модуль скорости ее центра масс не меняется и равен:

$$v_k \equiv v(t = t_k) = \frac{2}{3} v_0. \quad (6.163)$$

Как видим, искомый модуль скорости шайбы определяется только ее начальной скоростью v_0 и не зависит от других величин, заданных в условии задачи.

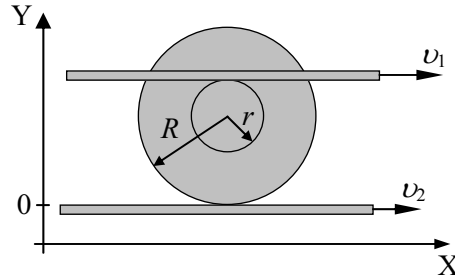
Подставляя заданные численные значения в (6.162) и (6.163), находим искомые величины:

$$t_k \cong 1,66 \text{ с}, \quad v_k = 20 \text{ м/с}.$$

6.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Две параллельные рейки движутся в одну сторону с постоянными скоростями v_1 и v_2 относительно лабораторной системы отсчета XY . Между рейками зажата катушка с радиусами R и r (см. рис.), которая движется вдоль реек без проскальзывания.

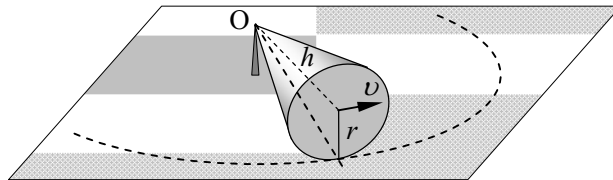


Найти координату y_m мгновенной оси вращения, угловую скорость вращения ω катушки и скорость v ее оси.

Ответ: $y_m = \frac{v_2(R+r)}{v_1-v_2}$, $\omega = \frac{v_1-v_2}{(R+r)}$, $v = \frac{v_1R+v_2r}{R+r}$.

Задача 2

Круглый конус высотой h и радиусом основания r катится без скольжения по горизонтальной поверхности (см. рис.). Вершина конуса шарнирно закреплена в точке O на уровне центра основания конуса, который движется с постоянной по модулю скоростью v . Найти угловую скорость вращения конуса ω и его угловое ускорение β .



Ответ: $\omega = \frac{v}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}$, $\beta = \frac{v^2}{rh}$.

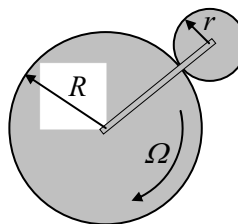
Задача 3

Однородный диск радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и положили на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения между поверхностью и диском равен μ . Через какое время τ угловая скорость вращения уменьшится в $n = 2$ раза.

Ответ: $\tau = \frac{3}{8} \cdot \frac{\omega R}{\mu g}$.

Задача 4

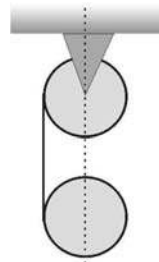
Кривошип, соединяющий оси двух зубчатых колес радиусами R и r , вращается с угловой скоростью Ω (см. рис.). Внутреннее колесо неподвижно. Найти угловую скорость вращения внешнего колеса ω и его относительную (по отношению к кривошипу) угловую скорость вращения $\omega_{\text{отн}}$.



Ответ: $\omega = \frac{\Omega(R+r)}{r}$, $\omega_{\text{отн}} = \frac{\Omega R}{r}$.

Задача 5

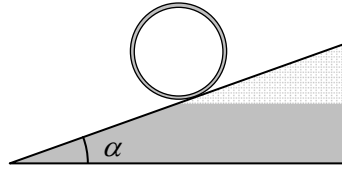
На два одинаковых однородных блока радиусами R намотана легкая нерастяжимая нить (см. рис.). В процессе движения оси блоков остаются параллельными и находятся в вертикальной плоскости. Трением в закрепленной оси верхнего блока, а также проскальзыванием нити по блокам пренебречь. Найти модуль ускорения оси нижнего блока a и модуль его углового ускорения β .



Ответ: $a = \frac{4}{5}g$, $\beta = \frac{2}{5} \cdot \frac{g}{R}$.

Задача 6

Тонкостенный цилиндр массой m скатывается без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании α (см. рис.).

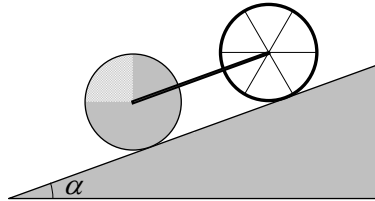


Найти ускорение a оси цилиндра и силу трения, действующая на него со стороны наклонной поверхности клина.

Ответ: $a = \frac{1}{2} g \sin \alpha$, $F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} mg \sin \alpha$.

Задача 7

Оси тонкостенного и сплошного цилиндров соединены невесомым стержнем. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании α (см. рис.).



Радиусы цилиндров одинаковы, масса каждого цилиндра m . Определить силу F реакции стержня.

Ответ: $F = \frac{mg \sin \alpha}{7}$.

Задача 8

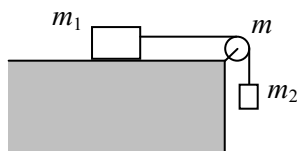
Сплошному однородному цилиндру массой m и радиусом R сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью ω . Затем положили его боковой поверхностью на горизонтальную плоскость и предоставили самому себе. На какое расстояние переместится цилиндр за время, в течение которого движение цилиндра проис-

ходило со скольжением. Коэффициент трения между поверхностью и цилиндром равен μ .

Ответ: $\Delta x = \frac{\omega^2 R^2}{18\mu g}$.

Задача 9

Два тела массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через однородный блок массой m (см. рис.).



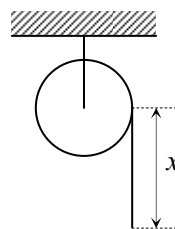
Коэффициент трения между первым телом и горизонтальной поверхностью равен μ . В процессе движения тел не происходит проскальзывания нити по поверхности блока. Найти ускорение второго тела, пренебрегая трением в оси блока.

Ответ: $a = g \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$, при $m_2 > \mu m_1$;

$a = 0$, при $m_2 \leq \mu m_1$.

Задача 10

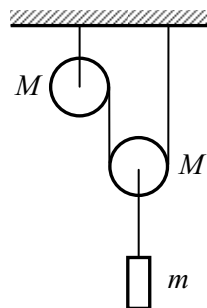
Однородный сплошной цилиндр массой M может свободно вращаться вокруг своей неподвижной горизонтальной оси (см. рис.). На цилиндр намотана тонкая нить длиной L и массой m . Найти ускорение a свешивающейся части нити в зависимости от ее длины x .



Ответ: $a = \frac{2mgx}{ML + 2m(L - x)}$.

Задача 11

Система тел, состоящая из груза и двух одинаковых блоков, изображена на рисунке. Ось левого блока закреплена, а правый блок свободно лежит на нити. При движении тел системы не происходит проскальзывания нити относительно поверхностей блоков. Считая заданными массу груза m , массы блоков M и их радиусы R , определить ускорение груза a . Трением в оси блока пренебречь.



Ответ:
$$a = \frac{m + M}{m + \frac{7}{2}M} g.$$

ГЛАВА 7

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. ГИРОСКОПЫ. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИЛЫ

7.1. Теоретический материал

Закон сохранения момента импульса (количества движения) механической системы относительно точки¹ – момент импульса механической системы L относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил M_{ex} относительно данной точки равна нулю:

$$\frac{dL}{dt} = M_{\text{ex}} = 0 \text{ или } dL = 0. \quad (7.1)$$

Закон сохранения момента импульса (количества движения) механической системы относительно оси – момент импульса механической системы L_n относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил M_n^{ex} относительно данной оси равна нулю:

$$\frac{dL_n}{dt} = M_n^{\text{ex}} = 0$$

или

$$dL_n = 0. \quad (7.2)$$

Для конечного интервала времени законы сохранения моментов импульса механической системы относительно точки и оси в соответствии с (7.1) и (7.2) можно записать в виде:

$$\Delta L \equiv L(t_2) - L(t_1) = 0 \text{ или } L(t_1) = L(t_2), \quad (7.3)$$

$$\Delta L_n \equiv L_n(t_2) - L_n(t_1) = 0 \text{ или } L_n(t_1) = L_n(t_2). \quad (7.4)$$

Законы сохранения моментов импульса относительно точки и оси являются прямым следствием законов их изменений (см. (6.38) и (6.39) в п. 6.1 Теоретический материал в Главе 6).

¹ Определения момента импульса (количества движения) механической системы и момента силы относительно точки (оси), а также формулировка закона изменения момента импульса (уравнения моментов) относительно точки (оси) даны в п. 6.1 Теоретический материал в Главе 6.

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела² в случае его произвольного движения равна:

$$\begin{aligned} E^k &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (V + [\omega r'_i])^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (V^2 + 2V \cdot [\omega r'_i] + [\omega r'_i]^2) = \\ &= \frac{1}{2} m V^2 + m V \cdot [\omega r'_{\text{цм}}] + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega r'_i]^2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь m_i и v_i – массы и скорости материальных точек, из которых состоит абсолютно твердое тело, V – скорость начала системы отсчета S' , жестко связанной с телом, ω – угловая скорость системы S' , r'_i – радиус-векторы материальных точек тела относительно системы S' , $r'_{\text{цм}}$ – радиус-вектор центра масс (см. Главу 3) тела относительно системы S' .

Если начало отсчета системы S' , связанной с абсолютно твердым телом, совпадает с центром масс тела, то его кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$E^k = \frac{1}{2} m v_{\text{цм}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega r'_i]^2, \quad (7.6)$$

где $v_{\text{цм}}$ – скорость центра масс тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела вокруг неподвижной оси:

$$E^k = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (7.7)$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость вращения тела.

² Определение кинетической энергии механической системы даны в п. 3.1 Теоретический материал в Главе 3, а определение абсолютно твердого тела в п. 6.1 Теоретический материал в Главе 6.

Работа внешних сил при повороте тела вокруг оси:

$$\delta A = M_n d\varphi, \quad A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_n d\varphi, \quad (7.8)$$

где M_n – момент сил относительно оси (см. п. 6.1 Теоретический материал в Главе 6), φ_1 и φ_2 – начальное и конечное значения угла поворота.

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела в случае его плоского движения:

$$E^k = \frac{1}{2} m V^2 + m \mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_{\text{цм}}] + \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (7.9)$$

Здесь смысл обозначений физических величин тот же, что и в (7.5) и (7.7).

Если начало отсчета системы S' , связанной с абсолютно твердым телом, находится в центре масс тела, то его кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр масс, и в случае плоского движения равна (теорема Кенига):

$$E^k = \frac{1}{2} m v_{\text{цм}}^2 + \frac{1}{2} J_{\text{цм}} \omega^2, \quad (7.10)$$

где $v_{\text{цм}}$ – скорость центра масс тела, $J_{\text{цм}}$ – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через его центр масс.

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела, записанная через момент инерции тела J_n относительно мгновенной оси вращения³:

$$E^k = \frac{1}{2} J_n \omega^2. \quad (7.11)$$

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела, закрепленного в точке:

$$E^k \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega r_i]^2, \quad (7.12)$$

³ Определение мгновенной оси вращения дано в п. 6.1 Теоретический материал в Главе 6.

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-векторы материальных точек, из которых состоит тело, относительно закрепленной точки этого тела. Если воспользоваться математическим соотношением $[\mathbf{ab}]^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2$, то:

$$\begin{aligned}
 E^k &= \frac{1}{2} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i)^2) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 r_i^2 - \left(\sum_{\alpha} \omega_{\alpha} x_{i\alpha} \right)^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\left(\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \right) r_i^2 - \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha} x_{i\alpha} \omega_{\beta} x_{i\beta} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta}) \right\} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}, \\
 E^k &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}. \tag{7.13}
 \end{aligned}$$

Здесь $J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta})$ – **тензор инерции тела**, характеризующий распределение массы тела относительно точки; $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела закрепленного на оси:

$$E^k = \frac{1}{2} J_n \omega^2, \tag{7.14}$$

где J_n – момент инерции тела относительно оси.

В данной главе рассматриваются системы, состоящие из совокупности абсолютно твердых тел и материальных точек. Эти системы являются частными случаями механической системы, для которой в Главе 3 сформулированы законы изменения и сохранения механической энергии.

Закон изменения механической энергии системы – изменение механической энергии системы равно работе внутренних

$F_i^{\text{np},\text{in}}$ и внешних $F_i^{\text{np},\text{ex}}$ непотенциальных сил⁴:

$$dE = -(\delta A^{\text{np},\text{in}} + \delta A^{\text{np},\text{ex}}) = \delta A^{\text{np}}, \quad (7.15)$$

или для конечного интервала времени

$$\Delta E = \Delta A^{\text{np}}. \quad (7.16)$$

Закон сохранения механической энергии системы – если работа всех непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы относительно инерциальной системы отсчета сохраняется:

$$\Delta E \equiv E(t_2) - E(t_1) = 0$$

или

$$E(t_1) = E(t_2). \quad (7.17)$$

Гироскопы

Гироскоп – это аксиально-симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии (см. рис. 7.1).

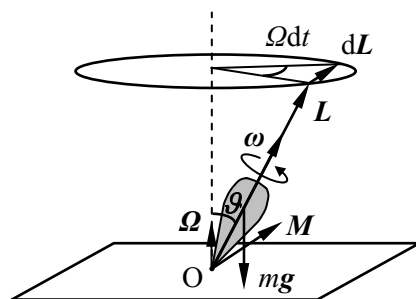


Рис. 7.1. Гироскоп в поле сил тяжести

Прецессия гироскопа – вращение оси симметрии гироскопа с угловой скоростью Ω под действием момента внешних сил наряду с его собственным вращением вокруг оси симметрии (см. рис. 7.1).

⁴ Определение механической энергии системы, внутренних и внешних непотенциальных сил даны в п. 3.1 Теоретический материал в Главе 3.

Основные физические допущения элементарной теории гироскопа:

- угловая скорость вращения гироскопа и его момент импульса направлены вдоль оси симметрии гироскопа;
- величина угловой скорости вращения гироскопа вокруг своей оси ω гораздо больше величины угловой скорости прецессии Ω .

В рамках принятых допущений момент импульса гироскопа L равен

$$L = J_z \omega, \quad (7.18)$$

а уравнение моментов (6.38) относительно его неподвижной точки О (см. рис. 7.1) имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (7.19)$$

где J_z – момент инерции гироскопа относительно своей оси симметрии, M – сумма моментов внешних сил (в том числе силы тяжести), действующих на гироскоп.

В соответствии с (7.19) ось гироскопа вместе с моментом L прецессирует вокруг вертикального направления с угловой скоростью Ω .

На рис. 7.1 видно, что:

$$dL = L \sin \vartheta \cdot \Omega dt, \quad (7.20)$$

$$dL = [\Omega L] dt. \quad (7.21)$$

Следовательно, прецессия гироскопа описывается уравнением:

$$\frac{dL}{dt} = [\Omega L]. \quad (7.22)$$

С учетом уравнения моментов (7.19) для гироскопа получим:

$$M = [\Omega L] = J_z [\Omega \omega]. \quad (7.23)$$

Заметим, что момент импульса определяет угловую скорость, а не ускорение прецессии, т.е. прецессионное движение является безинерционным!

Гироскопические силы – силы, действующие на крепление (рамку, подшипник, руки экспериментатора и т.д.) несвободного гироскопа при вынужденном вращении оси (вынужденной прецессии) гироскопа.

В соответствии с третьим законом Ньютона на крепление действует момент гироскопических сил:

$$\mathbf{M}_r = -\mathbf{M} = -[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{L}] = -J_z[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}]. \quad (7.24)$$

Правило Н.Е. Жуковского – гироскопические силы стремятся совместить момент импульса гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота.

7.2. Основные типы задач и методы их решения

7.2.1. Классификация задач

Большинство задач, относящихся к теме "Законы сохранения момента импульса и механической энергии. Гироскопы. Гироскопические силы" можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на

- 1) законы сохранения момента импульса и механической энергии системы (в том числе включающей в себя абсолютно твердые тела),
- 2) гироскопы и гироскопические силы.

7.2.2. Общая схема решения задач

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета (из соображений удобства), относительно которой будут рассматриваться законы сохранения (изменения) механической энергии и момента импульса механической системы, изобразить на чертеже ее систему координат, а также точку (ось), относительно которой записываются моменты импульсов и сил.
3. Изобразить и обозначить силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать механическую систему и рассматриваемый интервал (начальный и конечный моменты) времени.
5. Выбрать модели тел (если это не сделано в условии задачи) и рассмотреть особенности их движения на рассматриваемом интервале.

мых интервалах времени (непосредственно перед соударением, сразу после соударения, и т.д.).

6. Провести анализ действующих на тела системы сил и их моментов относительно выбранной точки (оси) вращения.

II. Записать полную систему уравнений по отношению к искомым величинам.

1. Выбрать законы сохранения (изменения) и записать их в выбранной системе отсчета для выбранной механической системы и выбранных интервалов времени в рамках выбранной модели движения тел системы.
2. Записать выражения для моментов сил, моментов инерции и импульса тел и механической энергии системы тел с учетом характера их движения.
3. Записать уравнения кинематической связи.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

7.3. Примеры решения задач

7.3.1. Законы сохранения момента импульса и механической энергии

Задача 7.1

Вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку закрепления математического маятника массой m и длиной l , может вращаться без трения однородный стержень массой M и длиной $L \geq l$, шарнирно закрепленный в той же точке (см. рис. 7.2). Маятник отпускают из горизонтального положения. Найти максимальный угол отклонения стержня $\alpha_{\max}$ после абсолютно упругого соударения с маятником.

Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с точкой подвеса математического маятника и стержня. Направим горизонтальную ось вращения за плоскость чертежа (см. рис. 7.2).

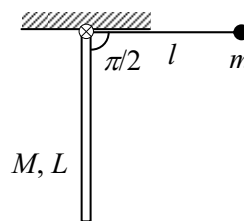


Рис. 7.2

Выберем четыре момента времени:

t_1 – момент начала движения математического маятника, t_2 – момент непосредственно перед соударением маятника со стержнем, t_3 – момент сразу после соударения, t_4 – момент, соответствующий максимальному отклонению стержня. В течение временного интервала (t_1, t_2) сохраняется механическая энергия математического маятника. В промежутке времени (t_2, t_3) сохраняются механическая энергия и момент импульса системы тел «маятник + стержень». Импульс системы тел в этом промежутке не сохраняется, поскольку в точке подвеса стержня во время соударения возникают дополнительные силы, импульс которых отличен от нуля. В промежутке времени (t_3, t_4) сохраняется механическая энергия стержня вследствие отсутствия сил трения.

Потенциальные энергии математического маятника и стержня будем считать равными нулю при их вертикальной ориентации.

II. Запишем закон сохранения механической энергии (7.17) для математического маятника на интервале времени (t_1, t_2) :

$$mgl = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}. \quad (7.25)$$

Здесь mgl – потенциальная энергия маятника в его исходном горизонтальном положении (в момент времени t_1), $\frac{J_1 \omega_1^2}{2}$ – кинетическая энергия маятника непосредственно перед соударением (в момент времени t_2), J_1 – момент инерции маятника относительно оси вращения, ω_1 – его угловая скорость перед соударением.

Для временного интервала (t_2, t_3) закон сохранения момента импульса (7.4) и механической энергии (7.17) для системы тел «маятник + стержень» имеют вид:

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 + J_1 \omega_3, \quad (7.26)$$

$$\frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_1 \omega_3^2}{2}, \quad (7.27)$$

где J_2 – момент инерции стержня, ω_2 и ω_3 – угловые скорости вращения стержня и маятника сразу после соударения.

Запишем также закон сохранения механической энергии (7.17) для стержня на интервале времени (t_3, t_4) :

$$\frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{MgL}{2} (1 - \cos \alpha_{\max}). \quad (7.28)$$

Моменты инерции маятника J_1 и стержня J_2 относительно выбранной оси вращения равны:

$$J_1 = ml^2, \quad (7.29)$$

$$J_2 = \frac{1}{3} ML^2. \quad (7.30)$$

III. Решая систему уравнений (7.25) – (7.30) относительно искомого максимального угла отклонения стержня, получаем:

$$\alpha_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{24}{\left(3 + \frac{M}{m} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} \right). \quad (7.32)$$

Поскольку $\alpha_{\max}$ не может превышать $\pi/2$, то на соотношения масс M/m и длин L/l стержня и математического маятника накладывается условие:

$$\frac{24}{\left(3 + \frac{M}{m} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} < 1, \quad (7.33)$$

при нарушении которого стержень ударится о потолок.

На рис. 7.3 изображены области значений отношений длин и масс маятника и стержня, при которых максимальный угол отклонения стержня в результате соударения с математическим маятником меньше или равен $\pi/2$. Кривая, изображенная на рис. 7.3 соответствует значениям отношений длин l/L и масс m/M маятника и стержня, при которых стержень принимает горизонтальное положение, не соударяясь с потолком. Область значений отноше-

ний длин и масс, расположенная выше изображенной кривой, соответствует случаю соударения стержня с потолком.

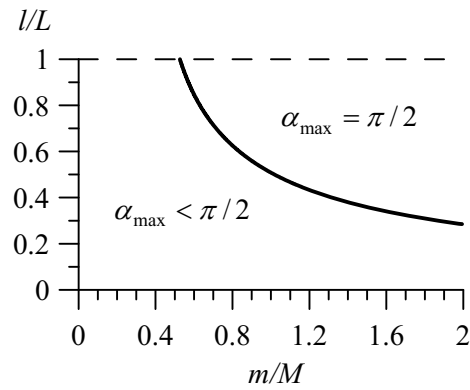


Рис. 7.3

На рис. 7.4 изображены зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения длин маятника и стержня $\alpha_{\max}(l/L)$ при различных значениях отношения их масс (m/M) .

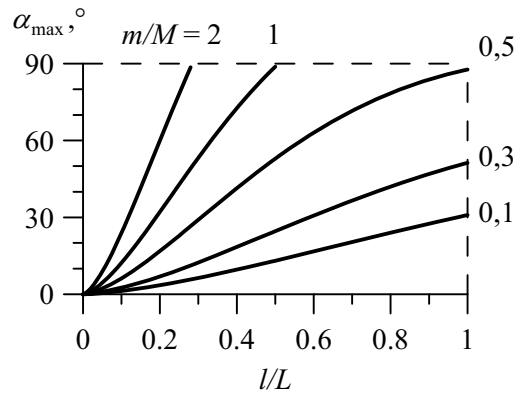


Рис. 7.4

Как видим, при увеличении отношения длин маятника и стержня максимальный угол отклонения стержня возрастает, при-

чем скорость возрастания увеличивается с увеличением отношения масс маятника и стержня.

На рис. 7.5 изображены зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения масс маятника и стержня $\alpha_{\max}(m/M)$ при различных значениях отношения их длин (l/L) .

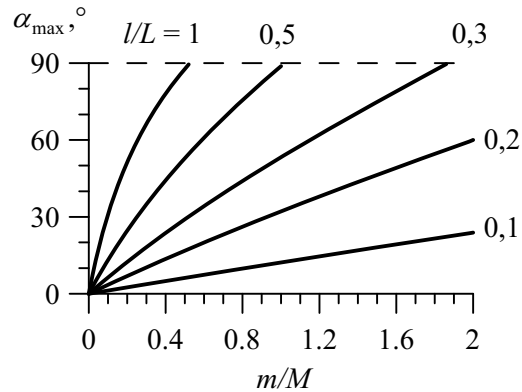


Рис. 7.5

Как видим, при увеличении отношения масс маятника и стержня максимальный угол отклонения стержня возрастает, причем скорость возрастания увеличивается с увеличением отношения длин маятника и стержня.

$$\text{Ответ: } \alpha_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{24}{\left(3 + \frac{M}{m} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} \right).$$

Задача 7.2

На гладкой горизонтальной поверхности лежат небольшая шайба массой m и тонкий однородный стержень длиной L и массой M . Шайбе сообщили скорость v в горизонтальном направлении перпендикулярно стержню (см. рис. 7.6). Шайба абсолютно упруго соударяется со стержнем в точке В на расстоянии l от его центра (точка О). Определить это расстояние в трех случаях:

- 1) сразу после соударения шайба останавливается,
- 2) шайба передает стержню максимальный импульс,
- 3) скорость конца стержня (точка А на рис. 7.6) после соударения равна нулю.

Решение

I. Задачу решаем относительно лабораторной инерциальной системы отсчета. Поскольку соударение шайбы со стержнем является абсолютно упругим, а на систему тел «стержень + шайба» не действуют внешние силы вдоль горизонтальной поверхности, то выполняются все три закона сохранения: закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса и закон сохранения механической энергии. Выберем систему координат так, как показано на рис. 7.6. Ось, относительно которой будем рассматривать вращение, удобно взять проходящей через центр стержня перпендикулярно горизонтальной поверхности и направленной из плоскости чертежа.

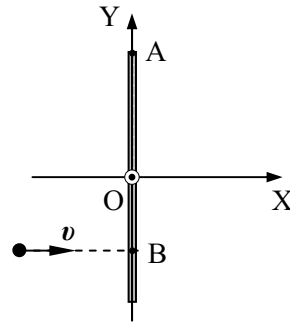


Рис. 7.6

II. Запишем три закона сохранения для выбранной системы тел для интервала времени до соударения – сразу после соударения.

Закон сохранения проекции импульса на ось X выбранной системы координат:

$$mv = mv' + Mv'' . \quad (7.34)$$

Закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси:

$$mvl = mv'l + J_0\omega . \quad (7.35)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Mv''^2}{2} + \frac{J_0\omega^2}{2} . \quad (7.36)$$

Здесь v' , v'' – проекции скоростей шайбы и центра стержня на ось X сразу после соударения (проекции скоростей на ось Y в этот момент времени равны нулю), ω – угловая скорость вращения стержня в тот же момент времени.

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс, равен (6.43):

$$J_0 = \frac{1}{12} ML^2. \quad (7.37)$$

В соответствии с принципом суперпозиции движений (см. (1.26) в Главе 1) скорость v_A точки А стержня складывается из скорости центра масс и скорости вращательного движения этой точки вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$v_A = v'' - \omega \frac{L}{2}. \quad (7.38)$$

III. Решение системы уравнений (7.34) – (7.38) относительно искомых величин имеет вид:

$$v' = v \frac{(m - M)J_0 + Mml^2}{(m + M)J_0 + Mml^2}, \quad (7.39)$$

$$v'' = v \frac{m}{M} \cdot \frac{2MJ_0}{(m + M)J_0 + Mml^2}, \quad (7.40)$$

$$\omega = v \frac{ml}{J_0} \cdot \frac{2MJ_0}{(m + M)J_0 + Mml^2}, \quad (7.41)$$

$$v_A = \frac{2mMJ_0}{(m + M)J_0 + Mml^2} \left(\frac{1}{M} - \frac{lL}{2J_0} \right). \quad (7.42)$$

Расстояние l от точки соударения до начала координат, при котором шайба остановится после удара, найдем из (7.39) при $v' = 0$ с учетом (7.37):

$$l = L \sqrt{\frac{M - m}{12m}}. \quad (7.43)$$

Как следует из (7.40), максимальное значение скорости центра стержня достигается при $l = 0$. При этом условии шайба передаст стержню максимальный импульс.

Значение l , при котором скорость точки А сразу после удара будет равна нулю, находим из (7.42) с учетом (7.37):

$$l = \frac{1}{6} L. \quad (7.44)$$

После попадания шайбы в точку с такими координатами стержень сразу после удара будет совершать только вращательное

движение вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку А.

Ответ:

$$1) \text{ шайба остановится сразу после удара, если } l = L \sqrt{\frac{M-m}{12m}};$$

2) шайба передаст стержню максимальный импульс, если она попадет в центр масс стержня ($l = 0$);

3) скорость точки А сразу после удара будет равна нулю при условии $l = \frac{1}{6}L$.

Задача 7.3

Два одинаковых однородных вращающихся тела сферической формы массой m и радиусом r движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v_0 . Угловые скорости вращения тел, ω_1 и ω_2 , составляют угол α и равны по модулю $|\omega_1| = |\omega_2| = \omega_0$. В результате лобового абсолютно неупругого соударения образуется одно тело той же плотности, форму которого можно также считать сферической. Определить угловую скорость ω вращения образовавшегося тела и изменение кинетической энергии системы ΔE^k .

Решение

I. Система двух тел в данной задаче предполагается изолированной. Следовательно, суммарный импульс системы и суммарный момент импульса в лабораторной инерциальной системе отсчета сохраняются. Направим ось X лабораторной системы отсчета вдоль линии, соединяющей центры масс двух тел до соударения.

II. Запишем закон сохранения проекции импульса рассматриваемой системы тел на ось X для интервала времени, включающего момент их соударения:

$$mv_0 - mv_0 = 2mv, \quad (7.45)$$

где v – проекция на ось X скорости поступательного движения образовавшегося после соударения тела массой $2m$. Как видим, $v = 0$, следовательно, движение образовавшегося тела является чисто вращательным.

Запишем закон сохранения момента импульса рассматриваемой системы тел относительно их общего центра масс на интервале времени, включающем момент их соударения:

$$L_1 + L_2 = L, \quad (7.46)$$

где L_1 и L_2 – моменты импульса первого и второго тел до соударения, L – момент импульса образовавшегося тела после соударения. Поскольку скорости тел до соударения направлены вдоль линии, на которой находится центр масс системы, то в соответствии с формулой (6.27) Главы 6 момент импульса каждого из рассматриваемых тел относительно центра масс системы тел равен моменту импульса тела относительно его центра масс.

Моменты импульса каждого из сферически симметричных тел относительно их собственных центров масс в соответствии с формулой (6.32) Главы 6 равны:

$$L_1 = J_0 \omega_1, \quad (7.47)$$

$$L_2 = J_0 \omega_2, \quad (7.48)$$

$$L = J \omega, \quad (7.49)$$

где J_0 и J – моменты инерции каждого из соударяющихся тел и образовавшегося тела относительно их собственных осей вращения. В соответствии с (6.45):

$$J_0 = \frac{2}{5} m r^2, \quad (7.50)$$

$$J = \frac{2}{5} (2m) R^2. \quad (7.51)$$

Радиус R образовавшегося тела находим из условия сохранения плотности (а, следовательно, и объема):

$$2 \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (7.52)$$

Согласно условию задачи модули угловых скоростей вращения тел до их соударения равны:

$$|\omega_1| = |\omega_2| = \omega_0. \quad (7.53)$$

Изменение кинетической энергии рассматриваемой системы тел ΔE^k в результате их абсолютно неупругого соударения в соответствии с (7.6) равно:

$$\Delta E^k = \frac{J\omega^2}{2} - 2\left(\frac{mv_0^2}{2} + \frac{J_0\omega_0^2}{2}\right). \quad (7.54)$$

III. Решая систему уравнений (7.46) – (7.53), получаем модуль угловой скорости вращения образовавшегося в результате соударения тела:

$$\omega = 2\omega_0 \frac{J_0}{J} \cos \frac{\alpha}{2} = \omega_0 \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (7.55)$$

Поскольку в соответствии с (7.46) – (7.49)

$$\omega = \frac{J_0}{J}(\omega_1 + \omega_2), \quad (7.56)$$

а модули угловых скоростей вращения тел до их соударения равны (7.53), то угловая скорость вращения образовавшегося тела ω направлена по биссектрисе угла α , образованного векторами угловых скоростей ω_1 и ω_2 .

Искомое изменение кинетической энергии рассматриваемой системы тел в результате соударения получим, подставляя (7.55) в (7.54) с учетом (7.50) – (7.52):

$$\begin{aligned} \Delta E^k &= J_0\omega_0^2 \left(\frac{J_0}{J} (1 + \cos \alpha) - 1 \right) - mv_0^2 = \\ &= \frac{2}{5} mr^2 \omega_0^2 \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4} (1 + \cos \alpha) - 1 \right) - mv_0^2. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Задача 7.4

Две одинаковые гантели массой m в виде шариков, соединенных стержнем, скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 так, как изображено на рис. 7.7. Момент инерции каждой гантели относительно оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно плоскости чертежа, равен J , а расстояние между центрами шариков гантели – l . Как будут двигаться гантели после абсолютно упругого соударения?

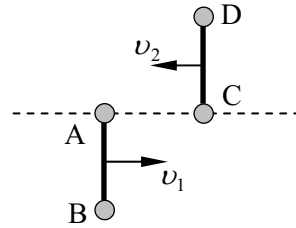


Рис. 7.7

Решение

I. Задачу решаем в двух системах отсчета: лабораторной системе, ось X декартовой системы координат которой направим так, как показано на рис. 7.8, и системе отсчета, связанной с центром масс системы тел, с осью X' , изображенной на рис. 7.9.

По условию задачи гантели движутся по гладкой горизонтальной поверхности, следовательно, центр масс системы тел, состоящей из двух гантелей, движется с постоянной скоростью, и система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной.

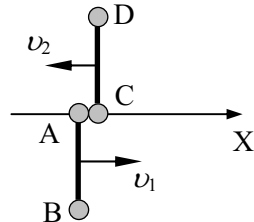


Рис. 7.8

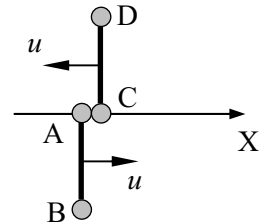


Рис. 7.9

Поскольку рассматриваемая система тел замкнута, а соударение абсолютно упругое, то выполняются законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса для этой системы в любой из выбранных систем отсчета.

II. По условию задачи в лабораторной системе отсчета гантели движутся поступательно со скоростями v_1 и v_2 , следовательно, проекция скорости центра масс на ось X лабораторной системы отсчета (см. Главу 3) равна

$$v_{\text{цм}} = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad (7.58)$$

а проекции скоростей центров масс гантелей u_1 и u_2 на ось X' относительно системы центра масс обеих гантелей определяются выражениями:

$$u_1 = v_1 - v_{\text{цм}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = u, \quad (7.59)$$

$$u_2 = -v_2 - v_{\text{цм}} = -\frac{v_1 + v_2}{2} = -u. \quad (7.60)$$

Запишем закон сохранения проекции импульса на ось X' для системы двух гантелей на интервале времени, включающем момент их соударения, в выбранной системе центра масс:

$$mu_1 + mu_2 = mu'_1 + mu'_2, \quad (7.61)$$

где u'_1 и u'_2 – скорости центров масс гантелей после соударения.

В общем случае после соударения движение каждой гантели будет суперпозицией поступательного движения ее центра масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно поверхности, по которой происходит скольжение гантелей (см. рис. 7.10).

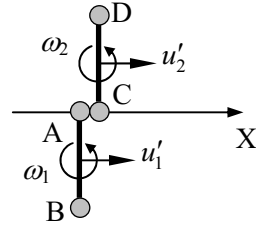


Рис. 7.10

Запишем закон сохранения механической энергии системы двух гантелей на интервале времени, включающем момент соударения, в системе их центра масс, при этом учтем, что при плоском движении твердого тела его кинетическая энергия выражается формулой (7.10):

$$\frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} = \frac{mu_1'^2}{2} + \frac{mu_2'^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{J\omega_2^2}{2}. \quad (7.62)$$

Здесь ω_1 и ω_2 – угловые скорости вращения гантелей после соударения.

Запишем также закон сохранения момента импульса системы двух гантелей относительно оси, проходящей через их центр масс перпендикулярно поверхности, по которой происходит скольжение гантелей, на том же интервале времени:

$$\frac{l}{2}mu_1 + \frac{l}{2}mu_2 = \frac{l}{2}mu'_1 + J\omega_1 - \frac{l}{2}mu'_2 + J\omega_2. \quad (7.63)$$

В (7.63) учтено, что момент импульса гантели относительно выбранной оси в соответствии с формулой (6.23) из Главы 6 равен сумме момента импульса центра масс гантели относительно этой оси в системе центра масс двух гантелей и момента импульса гантели относительно оси, проходящей через ее центр масс, в системе отсчета, связанной с этим центром масс.

Учитывая симметрию задачи в системе центра масс двух гантелей, запишем очевидные соотношения между угловыми скоро-

ствиями вращения гантелей и скоростями их центров масс после соударения (см. рис. 7.11):

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad (7.64)$$

$$u'_2 = -u'_1 = u'. \quad (7.65)$$

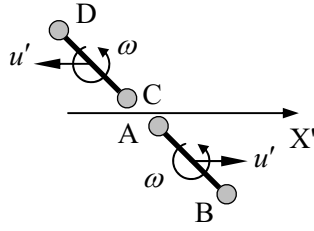


Рис. 7.11

III. Решим систему уравнений (7.59) – (7.65) относительно u'_1 , u'_2 , ω_1 и ω_2 :

$$u'_1 = -u'_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{ml^2 - 4J}{ml^2 + 4J} = u', \quad (7.66)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{4lm}{ml^2 + 4J} = \omega. \quad (7.67)$$

Заметим, что момент инерции гантели при заданной массе m максимален в случае, когда ее масса сосредоточена на концах гантели:

$$J \leq 2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{4}. \quad (7.68)$$

Следовательно, в соответствии с (7.66) $u' = u'_1 = -u'_2 \geq 0$ (см. рис. 7.11).

Скорости центров масс гантелей после соударения в лабораторной системе отсчета равны:

$$v'_1 = u' + v_{\text{цм}} = \frac{v_1 ml^2 - 4v_2 J}{ml^2 + 4J}, \quad (7.69)$$

$$v'_2 = -u' + v_{\text{цм}} = -\frac{v_2 ml^2 - 4v_1 J}{ml^2 + 4J}. \quad (7.70)$$

Итак, в результате абсолютно упругого соударения, движение гантелей представляет собой суперпозицию поступательного

движения их центров масс и вращательного движения с одинаковой угловой скоростью относительно осей, проходящих через их центры масс (см. рис. 7.12).

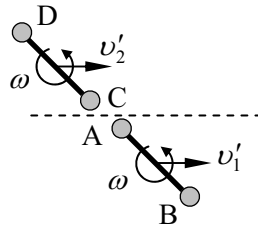


Рис. 7.12

В случае, когда масса гантели сосредоточена на ее концах, момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, равен:

$$J = \frac{ml^2}{4}. \quad (7.71)$$

При этом скорости центров масс гантелей после первого соударения в лабораторной системе отсчета и угловая скорость их вращения равны:

$$v'_1 = v'_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}, \quad (7.72)$$

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{l}. \quad (7.73)$$

В соответствии с (7.65) скорости центров масс гантелей после соударения в системе центра масс системы тел равны нулю. Следовательно, в рассматриваемом частном случае гантели, вращаясь с одинаковой угловой скоростью, испытают повторное соударение (см. решение Задачи 8 в Главе 3).

Задача. 7.5

Тонкий однородный стержень длиной l_0 и массой $m_0 = 10\text{ г}$ вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку его подвеса, описывая при этом коническую поверхность (см. рис. 7.13). Жук, сидящий на стержне, начинает медленно ползти с верхнего закрепленного его конца к нижнему концу. Начальный

угол отклонения стержня от вертикали составляет $\alpha_0 = 60^\circ$. При какой массе жука m угол отклонения стержня от вертикали составит $\alpha_1 = 45^\circ$ после того, как жук достигнет нижнего конца стержня?

Решение

I. При движении жука вдоль стержня на систему тел «стержень + жук» действуют силы тяжести и силы реакции со стороны подвеса. Поскольку моменты этих сил относительно вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, равны нулю, момент импульса рассматриваемой системы тел относительно этой оси в лабораторной инерциальной системе отсчета не изменяется. Поэтому при решении задачи будем использовать закон сохранения момента импульса относительно вертикальной оси для двух моментов времени: начала движения ($l = 0$, $\alpha = \alpha_0$) и момента достижения жуком конца стержня ($l = l_0$, $\alpha = \alpha_1$). Здесь введены обозначения: l – расстояние от жука до точки подвеса стержня и α – угол отклонения стержня от вертикали.

В процессе движения жука расстояние l , угол α , а также угловая скорость вращения стержня ω изменяются. Для нахождения взаимосвязи между углом отклонения α и угловой скоростью ω удобно перейти к неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с вращающимся стержнем. В этой системе отсчета на систему тел «стержень + муфта» действуют силы тяжести, сила реакции подвеса в точке крепления стержня и силы инерции.

Поскольку жук в соответствии с условием задачи движется по стержню медленно, то угловая скорость вращения стержня ω также медленно изменяется ($\dot{\omega} \cong 0$), следовательно, переносная сила инерции (см. (4.16) в Главе 4) примерно равна центробежной силе инерции: $F_{\text{пер}} \cong F_{\text{цб}}$. Силой инерции Кориолиса (см. (4.17) в Главе 4), действующей на медленно движущегося жука, также пренебрегаем: $F_{\text{Кор}} \cong 0$.

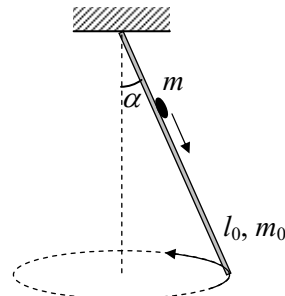


Рис. 7.13

Сумма моментов внешних сил, действующих на систему тел «стержень + жук», равна нулю относительно любой оси, неподвижной относительно выбранной неинерциальной системы отсчета.

Заметим, что центробежная сила инерции, действующая на различные элементы стержня, зависит от расстояния между данным элементом и вертикальной осью вращения неинерциальной системы отсчета. Следовательно, для расчета суммарного момента сил инерции, действующих на стержень, необходимо просуммировать моменты сил инерции, действующих на каждый из элементов стержня. Заметим также, что момент силы реакции подвеса в точке крепления стержня равен нулю относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Таким образом, для решения задачи воспользуемся законом сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» относительно вертикальной оси в лабораторной инерциальной системе отсчета и условием равенства нулю суммарного момента сил, действующих на эту систему тел относительно оси, жестко связанной с вращающимся стержнем и проходящей через точку подвеса, в неинерциальной системе отсчета.

II. Момент импульса системы тел «стержень + жук» L складывается из моментов импульсов стержня $L^{\text{ст}}$ и жука $L^{\text{ж}}$ в отдельности. Момент импульса элемента стержня $L^{\text{ст}}$ зависит от расстояния между данным элементом и вертикальной осью вращения стержня. Следовательно, для расчета суммарного момента импульса стержня необходимо просуммировать моменты импульсов всех элементов стержня. Запишем момент импульса системы тел «стержень + жук» в лабораторной инерциальной системе отсчета относительно вертикальной оси вращения:

$$\begin{aligned} L &= L^{\text{ст}} + L^{\text{ж}} = \int_0^{l_0} x \sin \alpha \frac{m_0}{l_0} dx \omega x \sin \alpha + l \sin \alpha m \omega l \sin \alpha = \\ &= \omega \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{3} m_0 l_0^2 + m l^2 \right), \end{aligned} \quad (7.74)$$

где x — координата элемента стержня длиной dx вдоль стержня относительно точки подвеса.

Запишем также закон сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» относительно вертикальной оси в лабораторной инерциальной системе отсчета на интервале времени от начала

движения жука ($l = 0$, $\alpha = \alpha_0$) до момента достижения им нижнего конца стержня ($l = l_0$, $\alpha = \alpha_1$):

$$L_1 - L_0 = \frac{1}{3} \omega_1 \sin^2 \alpha_1 (m_0 + 3m) l_0^2 - \frac{1}{3} \omega_0 \sin^2 \alpha_0 m_0 l_0^2 = 0, \quad (7.75)$$

где L_0 и ω_0 – момент импульса системы тел и угловая скорость их вращения в начальный момент времени, а значения этих величин в конечный момент времени – L_1 и ω_1 .

Запишем равенство нулю суммы моментов внешних сил, действующих на систему тел «стержень + жук», относительно горизонтальной оси, неподвижной в выбранной неинерциальной системе отсчета и проходящей через верхний конец стержня О (см. рис. 7.14):

$$M_{\text{тж}}^{\text{ст}} + M_{\text{тж}}^{\text{ж}} + M_{\text{цб}}^{\text{ст}} + M_{\text{цб}}^{\text{ж}} = 0. \quad (7.76)$$

Моменты сил тяжести, действующих на стержень $M_{\text{тж}}^{\text{ст}}$ и жука $M_{\text{тж}}^{\text{ж}}$, равны:

$$M_{\text{тж}}^{\text{ст}} = -\frac{1}{2} m_0 g l_0 \sin \alpha, \quad (7.77)$$

$$M_{\text{тж}}^{\text{ж}} = -m g l \sin \alpha. \quad (7.78)$$

Момент центробежной силы инерции $M_{\text{цб}}^{\text{ж}}$ (см. (4.16) в Главе 4), действующей на жука, определяется выражением:

$$M_{\text{цб}}^{\text{ж}} = m \omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (7.79)$$

Для нахождения суммарного момента сил инерции, действующих на стержень $M_{\text{цб}}^{\text{ст}}$, рассмотрим элемент стержня длиной dx , находящийся на расстоянии x от верхнего конца стержня. Центробежная сила инерции (см. (4.16)), действующая на этот элемент, равна

$$dF_{\text{цб}}^{\text{ст}} = \frac{m_0}{l_0} dx \omega^2 x \sin \alpha, \quad (7.80)$$

где $x \sin \alpha$ – расстояние от элемента стержня до вертикальной оси вращения выбранной неинерциальной системы отсчета.

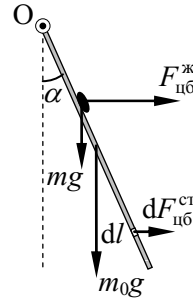


Рис. 7.14

Момент силы инерции, действующей на элемент стержня, относительно горизонтальной оси, неподвижной в выбранной неинерциальной системе отсчета и проходящей через верхний конец стержня О, можно записать в виде (см. рис. 7.21):

$$dM_{\text{цб}}^{\text{ст}} = dF_{\text{цб}}^{\text{ст}} x \cos \alpha = \frac{m_0}{l_0} dx \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (7.81)$$

Интегрируя (7.104) по всей длине стержня, получим суммарный момент сил инерции, действующих на стержень:

$$M_{\text{цб}}^{\text{ст}} = \int_0^{l_0} \frac{m_0}{l_0} dx \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} m_0 \omega^2 l_0^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (7.82)$$

III. Определим взаимосвязь между угловой скоростью вращения стержня (и жука) и угла отклонения стержня от вертикали в произвольный момент времени. Решая совместно уравнения (7.76) – (7.79) и (7.82), получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(m_0 l_0 + 2ml)}{2(m_0 l_0^2 + 3ml^2) \cos \alpha}}. \quad (7.83)$$

В соответствии с (7.83) для начального ($l = 0$, $\alpha = \alpha_0$) и конечного ($l = l_0$, $\alpha = \alpha_1$) моментов времени можно записать:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l_0 \cos \alpha_0}}, \quad (7.84)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g(m_0 + 2m)}{2l_0 \cos \alpha_1 (m_0 + 3m)}}. \quad (7.85)$$

Преобразуя закон сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» (7.75), получаем:

$$\omega_1 \sin^2 \alpha_1 (m_0 + 3m) - \omega_0 \sin^2 \alpha_0 m_0 = 0. \quad (7.86)$$

Подстановка (7.84) и (7.85) в (7.86) дает квадратное уравнение для определения искомой массы жука m :

$$6m^2 + 5m_0 m + m_0^2 \left(1 - \frac{\sin^4 \alpha_0}{\sin^4 \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0} \right) = 0. \quad (7.87)$$

Решая уравнение (7.87), окончательно получим:

$$m = \frac{1}{12} \left(-5 + \sqrt{1 + 24 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\sin^4 \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}} \right) m_0. \quad (7.88)$$

Воспользовавшись численными значениями физических величин, заданных в условии задачи, находим

$$m \approx 0,32 m_0 = 3,2 \text{ г}.$$

Задача 7.6

Спутник массой m движется по эллиптической траектории вокруг планеты, находящейся в одном из ее фокусов (см. рис. 7.15).

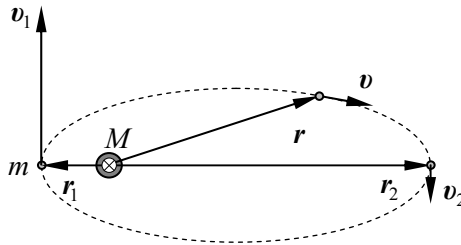


Рис. 7.15

Известны наименьшее r_1 и наибольшее r_2 расстояния от спутника до центра планеты, а также модуль его скорости v_1 в наиболее близкой к планете точке траектории. Найти массу планеты M , а также радиусы кривизны траектории спутника и в наиболее близкой R_1 и наиболее удаленной R_2 от планеты точках его траектории.

Решение

I. Лабораторную систему отсчета, связанную с планетой, будем считать инерциальной. При дальнейшем рассмотрении будем считать спутник материальной точкой, а планету – сферически симметричным телом. Движение спутника по эллиптической траектории происходит под действием одной силы – силы гравитационного взаимодействия (см. п. 2.1.2.А в Главе 2) спутника и планеты. Поскольку эта сила является центральной (п. 3.1.2.А в Главе 3), то момент импульса спутника относительно оси, проходящей через центр планеты перпендикулярно плоскости траектории спутника, в соответствии с законом сохранения момента импульса механической системы относительно оси (см. п. 7.1. Теоретический материал) не меняется со временем.

Будем считать, что система тел «спутник + планета» является изолированной, а центральные силы взаимодействия тел системы –

потенциальны (п. 3.1.2.А в Главе 3). В этом случае можно воспользоваться законом сохранения механической энергии рассматриваемой системы (п. 7.1. Теоретический материал).

II. Запишем закон сохранения момента импульса спутника относительно оси, проходящей через центр планеты перпендикулярно плоскости траектории спутника (см. рис. 7.15), для моментов времени нахождения спутника на минимальном r_1 и максимальном r_2 расстоянии от планеты:

$$r_2 m v_2 - r_1 m v_1 = 0, \quad (7.89)$$

где v_2 – модуль скорости спутника при максимальном удалении от планеты. При записи (7.89) было учтено, что скорость $\mathbf{v}$ и радиус-вектор $\mathbf{r}$ спутника относительно центра планеты в рассматриваемые моменты времени взаимно перпендикулярны. Заметим, что в остальные моменты времени угол между скоростью $\mathbf{v}$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$ не равен $\pi/2$ (рис. 7.15).

Запишем закон сохранения механической энергии системы тел «спутник + планета» для моментов времени нахождения спутника на минимальном r_1 и максимальном r_2 расстоянии от планеты:

$$\frac{m v_2^2}{2} + E_2^p - \frac{m v_1^2}{2} - E_1^p = 0. \quad (7.90)$$

Здесь E_1^p и E_2^p – потенциальные энергии системы тел «спутник + планета» в рассматриваемые моменты времени.

Определим потенциальную энергию системы при произвольном расстоянии r между спутником и центром планеты.

Выберем ноль отсчета потенциальной энергии, соответствующий положению спутника на физически бесконечно большом расстоянии от планеты. Тогда в соответствии с определением потенциальной энергии механической системы (см. (3.32) в Главе 3) можно записать:

$$E^p = \int_r^\infty -G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r}. \quad (7.91)$$

Следовательно, потенциальная энергия системы тел «спутник + планета» в моменты нахождения спутника на минимальном r_1 и максимальном r_2 расстоянии от планеты равна:

$$E_1^p = -G \frac{mM}{r_1}, \quad (7.92)$$

$$E_2^p = -G \frac{mM}{r_2}. \quad (7.93)$$

Для определения радиуса кривизны траектории спутника запишем уравнение его движения в проекции на нормальную ось, направленную к центру кривизны траектории перпендикулярно скорости спутника, в рассматриваемые моменты времени:

$$m \frac{v_1^2}{R_1} = G \frac{mM}{r_1^2}, \quad (7.94)$$

$$m \frac{v_2^2}{R_2} = G \frac{mM}{r_2^2}. \quad (7.95)$$

III. Решая записанную в п. II систему уравнений (7.89) – (7.95) получаем искомое выражения для массы планеты

$$M = \frac{v_1^2}{2G} (r_2 + r_1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (7.96)$$

и радиусов кривизны траектории в рассматриваемые моменты времени

$$R_1 = R_2 = 2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (7.97)$$

Заметим, что обе искомые физические величины не зависят от массы спутника, что дает возможность нахождения массы планеты, исходя из измерений только кинематических характеристик спутника.

7.3.2. Гироскопы. Гироскопические силы

Задача 7.7

Электродвигатель закреплен на подставке так, что его ось и общий центр масс находятся посередине между опорами подставки, расстояние между которыми равно l . Двигатель с подставкой поставили на гладкую горизонтальную поверхность. Найти силы давления опор подставки на поверхность, если после включения ротор двигателя раскручивается с угловым ускорением β вокруг его геометрической оси, а его момент инерции относительно этой оси равен J . Масса двигателя с подставкой равна m .

Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета. Ось Z декартовой системы координат направим вертикально вверх. Ось, относительно которой записываем моменты сил и импульса тел, выберем совпадающей с геометрической осью ротора и направленной за плоскость чертежа (см. рис. 7.16).

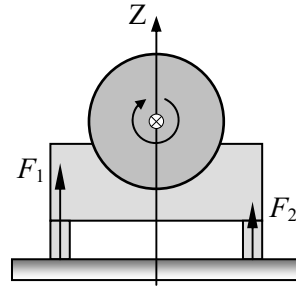


Рис. 7.16

При включении электродвигателя момент сил, действующих на ротор со стороны статора, закрепленного на подставке, изменяет момент импульса ротора. В соответствии с третьим законом Ньютона такой же по величине момент сил действует со стороны ротора на статор с подставкой. При этом на подставку действуют также моменты сил реакции со стороны поверхности, на которой она находится. Подставка с закрепленным на ней статором остается в покое, поэтому суммарный момент всех внешних сил, действующих на них относительно произвольно выбранной оси, равен нулю.

II. Для ротора двигателя запишем уравнение моментов относительно выбранной оси:

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (7.98)$$

где L – момент импульса ротора относительно оси его вращения.

Поскольку момент силы тяжести относительно оси ротора равен нулю, суммарный момент внешних сил M равен моменту сил, действующих на ротор со стороны статора с подставкой.

Условия равновесия для статора и подставки запишем в следующем виде:

$$-M + F_1 \frac{l}{2} - F_2 \frac{l}{2} = 0, \quad (7.99)$$

$$F_1 + F_2 - mg = 0. \quad (7.100)$$

где F_1 и F_2 – силы, действующие на подставку со стороны поверхности (см. рис. 7.16).

Момент импульса ротора, вращающегося с угловой скоростью ω относительно своей геометрической оси, равен

$$L = J\omega. \quad (7.101)$$

В соответствии с определением углового ускорения запишем:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \quad (7.102)$$

В результате получена полная система уравнений для нахождения сил, действующих на подставку со стороны поверхности. В соответствии с третьим законом Ньютона эти силы равны по величине искомым силам, действующим со стороны подставки на поверхность.

III. Решая полученную систему уравнений (7.98) – (7.102) относительно F_1 и F_2 , получаем:

$$F_1 = \frac{mg}{2} + \frac{J\beta}{l}, \quad (7.103)$$

$$F_2 = \frac{mg}{2} - \frac{J\beta}{l}. \quad (7.104)$$

Заметим, что при угловом ускорении ротора $\beta \geq \frac{mgl}{2J}$ правая опора подставки двигателя отрывается от поверхности.

Задача 7.8

Массивный цилиндрический каток (бегун) массой m , который может вращаться вокруг своей геометрической оси, приведен во вращение вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω и катится без скольжения по горизонтальной опорной плите (см. рис. 7.17).

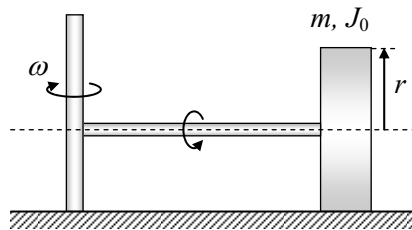


Рис. 7.17

Радиус катка r . Момент инерции катка относительно геометрической оси равен J_0 . Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту.

Решение

I. Выберем оси декартовой системы координат так, как показано на рис. 7.18. Каток участвует в двух движениях – вращении вокруг вертикальной оси Z с угловой скоростью ω и вокруг собственной геометрической оси AA' с угловой скоростью ω_1 . Направления угловых скоростей показаны на рис. 7.18. Неподвижной остается точка крепления катка к вертикальной оси – точка C .

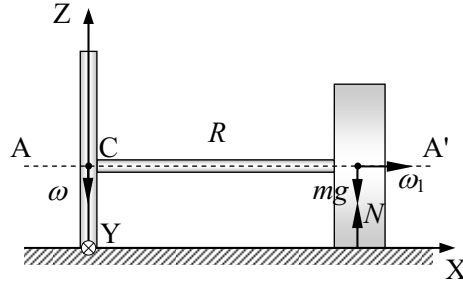


Рис. 7.18

На каток действуют сила тяжести mg , сила реакции опоры N и сила реакции со стороны вертикальной оси, приложенная в точке C (не изображенная на рис. 7.18). Будем считать стержень, с помощью которого каток крепится к вертикальной оси, невесомым. По условию задачи цилиндрический каток движется без проскальзывания, это означает, что толщина катка существенно меньше расстояния R от катка до вертикальной оси вращения. Трением качения, возникающим при неупругих деформациях, пренебрегаем. По условию задачи требуется найти полную силу давления катка на опорную плиту, которая в соответствии с третьим законом Ньютона равна по модулю силе нормальной реакции опорной плиты N , действующей на каток.

II. Отличные от нуля моменты относительно точки C имеют две силы – сила тяжести M_{mg} и сила нормальной реакции со стороны горизонтальной поверхности M_N . Запишем уравнение моментов для катка относительно точки C крепления катка к вертикальной оси:

$$\frac{dL}{dt} = M_N + M_{mg}. \quad (7.105)$$

При качении катка по горизонтальной поверхности происходит постоянное изменение направления его оси, что определяет изменение направления вектора момента импульса. Горизонтальная составляющая момента импульса L_{xy} (см. рис. 7.19) поворачивается вокруг оси Z (см. рис. 7.20), а вертикальная составляющая L_z остается неизменной:

$$dL = dL_{xy} + dL_z = dL_{xy} . \quad (7.106)$$

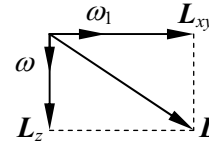


Рис. 7.19

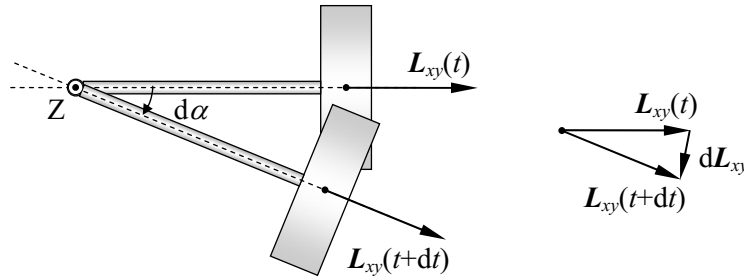


Рис. 7.20

Моменты силы тяжести M_{mg} и силы нормальной реакции опорной плиты M_N относительно точки C направлены в противоположных направлениях вдоль оси Y (см. рис. 7.18). Следовательно, для величины скорости изменения горизонтальной составляющей момента импульса L_{xy} с учетом (7.105) и (7.106) можно записать:

$$\left| \frac{dL_{xy}}{dt} \right| = |M_N + M_{mg}| = RN - Rmg . \quad (7.107)$$

Поскольку составляющая момента импульса L_{xy} направлена вдоль собственной геометрической оси катка AA' , то в соответствии с формулой (6.30) Главы 6:

$$L_{xy} = J_0 \omega_1 . \quad (7.108)$$

В соответствии с условием задачи качение происходит без проскальзывания, следовательно, скорости точек катка, соприкасающихся с горизонтальной поверхностью, равны нулю. С другой

стороны, в силу принципа суперпозиции движений, скорость этих точек складывается из скорости вращения вокруг вертикальной оси и скорости вращения вокруг собственной оси катка. Следовательно угловые скорости ω и ω_1 связаны соотношением:

$$\omega R - \omega_1 r = 0. \quad (7.109)$$

Найдем величину скорости изменения горизонтальной составляющей момента импульса L_{XY} . В соответствии с рис. 7.20. можно записать:

$$\left| \frac{dL_{XY}}{dt} \right| = \frac{L_{XY} d\alpha}{dt} = L_{XY} \omega. \quad (7.110)$$

В результате получена полная система уравнений (7.107) – (7.110) для нахождения N .

III. Решая систему уравнений (7.107) – (7.110) относительно величины силы нормальной реакции опорной плиты, получаем:

$$\left| \frac{dL_{XY}}{dt} \right| = J_0 \frac{R}{r} \omega^2 = R(N - mg), \quad (7.111)$$

$$N = \frac{J_0}{r} \omega^2 + mg. \quad (7.112)$$

В соответствии с третьим законом Ньютона искомая полная сила давления катка на опорную плиту равна по модулю силе нормальной реакции опорной плиты N , действующей на каток (7.112).

Задача 7.9

Гирискон представляет собой однородный диск радиусом $R = 5$ см и массой m_0 , закрепленный на невесомом горизонтальном стержне, ориентированном вдоль оси OO' (рис. 7.21). Гирискон может вращаться вокруг осей OO' и CD . Диск гирископа уравновешен на другом конце оси OO' телом с той же массой m_0 . Гирискон раскрутили вокруг собственной оси OO' так, что он делает $n = 50$ об./с. Затем к телу массой m_0 подвесили еще одно

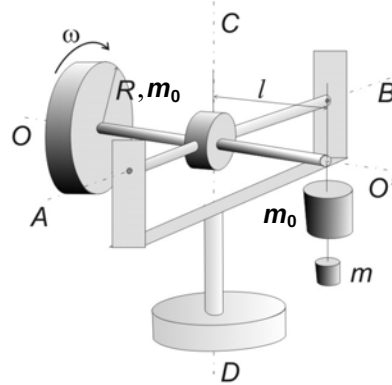


Рис. 7.21

тело массой $m = m_0/10$. Найти период вращения гироскопа вокруг оси CD, если расстояние l от оси CD до точки подвеса тела массой m_0 (см. рис. 7.21) равно 10 см.

Решение

I. До подвешивания тела массой m гироскоп уравновешен, следовательно сумма моментов силы тяжести, действующей на диск гироскопа, и силы натяжения нити подвеса тела массой m_0 относительно точки пересечения осей вращения OO' и CD гироскопа равна нулю. В условии равновесия гироскоп не совершает прецессии. После подвешивания тела массой m увеличивается момент силы натяжения нити подвеса, что приводит к изменению момента импульса гироскопа. Поскольку момент импульса гироскопа значительно больше изменения момента силы натяжения нити подвеса, то происходит медленное изменение направления момента импульса гироскопа L – прецессия оси гироскопа.

II. Запишем уравнение прецессии гироскопа (см. (7.23)) относительно точки пересечения его осей вращения OO' и CD (см. рис. 7.18):

$$\mathbf{M} = [\boldsymbol{\Omega} L], \quad (7.113)$$

где $\mathbf{M}$ – сумма моментов внешних сил, действующих на гироскоп, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость прецессии.

Дополним это уравнение выражением (7.18) для момента импульса гироскопа относительно его собственной оси OO' :

$$\mathbf{L} = J_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (7.114)$$

Здесь момент инерции гироскопа, представляющего собой однородный диск, закрепленный на невесомом стержне, в соответствии с формулой (6.44) в Главе 6 равен

$$J_0 = \frac{m_0 R^2}{2}, \quad (7.115)$$

а угловая скорость вращения гироскопа $\boldsymbol{\omega}$ связана с числом его оборотов n вокруг собственной оси соотношением:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\pi n. \quad (7.116)$$

Подвешенные к стержню гироскопа тела массой m_0 и m не перемещаются вдоль вертикальной оси CD в процессе движения гироскопа, поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона сила натяжения нити подвеса тел F равна

$$F = (m_0 + m)g. \quad (7.117)$$

Сумма моментов силы тяжести, действующей на диск гироскопа массой m_0 , и силы натяжения нити подвеса тел массой m_0 и m относительно точки пересечения осей вращения OO' и CD гироскопа направлена вдоль оси AB (см. рис. 7.22) и равна по модулю

$$M = -m_0gl + (m_0 + m)gl = mgl. \quad (7.118)$$

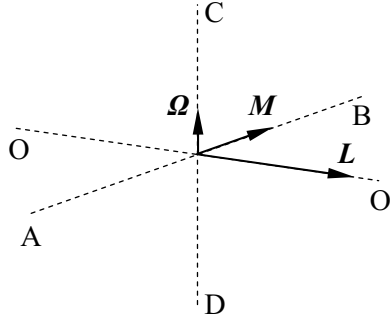


Рис. 7.22

Вследствие быстрого вращения гироскопа вокруг своей оси его момент импульса будем считать направленным вдоль оси вращения OO' (рис. 7.22). При этом угловая скорость прецессии Ω в соответствии с (7.113) направлена вдоль оси CD (рис. 7.22).

Подставляя (7.114) – (7.118) в (7.113) с учетом направления векторов M , L и Ω , для модуля угловой скорости прецессии гироскопа Ω получаем:

$$\Omega = \frac{|M|}{|L|} = \frac{mgl}{\pi m_0 R^2}. \quad (7.119)$$

Искомый период вращения гироскопа вокруг оси CD в соответствии с (7.118) равен:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi^2 n \frac{m_0 R^2}{mgl}. \quad (7.120)$$

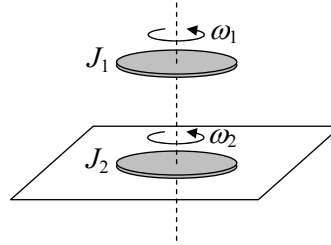
Подставляя численные значения физических величин, заданных в условии задачи, получим

$$T = 12,5 \text{ с}.$$

7.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

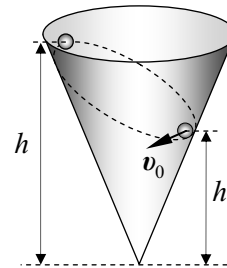
Диск, вращающийся с угловой скоростью ω_1 вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс, падает на другой диск, вращающийся на гладкой горизонтальной поверхности с угловой скоростью ω_2 вокруг той же оси (см. рис.). Моменты инерции дисков относительно оси вращения равны J_1 и J_2 . После падения верхнего диска на нижний оба диска, благодаря трению между ними, через некоторое время стали вращаться как единое целое. Найти работу A , которую совершили при этом силы трения, действующие между дисками.



Ответ: $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} (\omega_1 - \omega_2)^2$.

Задача 2

По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (см. рис.). В начальный момент времени шарик находится на высоте h_0 и имеет скорость v_0 , направленную горизонтально. На какую максимальную высоту h поднимется шарик в процессе движения? Чему равна его скорость v на этой высоте?



Ответ: $h = \frac{v_0^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh_0}{v_0^2}} \right)$; скорость шарика направлена горизонтально и ее модуль равен:

$$v = \frac{v_0}{2} \sqrt{1 + \frac{8gh_0}{v_0^2}}.$$

Задача 3

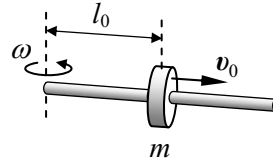
Тонкая палочка длиной l и массой m лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Пуля массой $m_0 = m/8$, летевшая перпен-

дикулярно палочке и параллельно поверхности со скоростью v_0 , попадает в палочку на расстоянии $l_0 = l/4$ от ее конца и застревает в ней. Найти угловую скорость вращения системы тел после соударения.

Ответ: $\omega = \frac{4}{13} \cdot \frac{v_0}{l}$.

Задача 4

На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω , на расстоянии l_0 от оси находится муфта массой m (см. рис.). В некоторый момент времени муфте сообщают скорость $v_0 = l_0\omega$ вдоль стержня, направленную от оси вращения. Какой момент сил M должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал равномерное вращение? Как меняется расстояние муфты от оси вращения в зависимости от времени?



Ответ: $M(t) = 2ml_0^2\omega^2e^{2\omega t}$, $l(t) = l_0e^{\omega t}$.

Задача 5

Корабль движется со скоростью $v = 40$ км/час по дуге окружности радиуса $R = 300$ м. Найти момент гироскопических сил M_G , действующих на подшипники двигателя корабля со стороны ротора, который имеет момент инерции относительно оси вращения $J_0 = 3,6 \cdot 10^3$ кг·м² и делает $n = 150$ об./мин. Ось вращения расположена вдоль корабля.

Ответ: $M_G = 2\pi J_0 \frac{v}{R} = 2,1 \cdot 10^3$ Н·м.

Задача 6

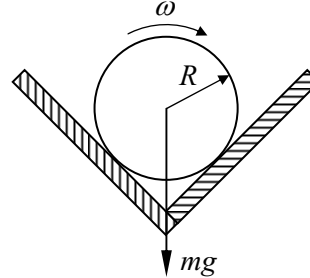
Гироскоп массой $m = 0,5$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 200$ рад/с. Момент инерции гироскопа $J = 5 \cdot 10^{-4}$ кг·м². Угловая скорость прецессии в поле сил тяжести Земли $\Omega = 0,5$ рад/с. Угол между вертикалью и осью гироскопа $\alpha = 30^\circ$. Определить расстоя-

ние l от точки опоры до центра масс и угловое ускорение гироскопа.

Ответ: $l = \frac{\Omega J \omega}{mg} = 0,5 \text{ см}, \beta = \omega \Omega \sin \alpha = 50 \text{ рад/с}^2$.

Задача 7

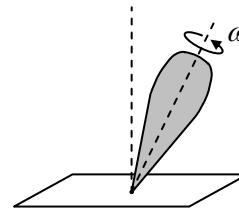
Горизонтальный желоб состоит из двух взаимно перпендикулярных досок. Сплошной однородный цилиндр раскрутили до угловой скорости ω и поместили в желоб так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между стенками желоба и цилиндром равен μ . Найти время вращения цилиндра в желобе.



Ответ: $T = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{R\omega}{g\mu}$.

Задача 8

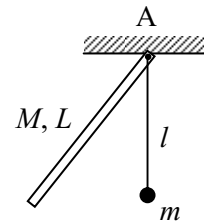
Волчок массой m , опирающийся о горизонтальную поверхность, вращается с угловой скоростью ω вокруг своей геометрической оси (см. рис.). Момент инерции волчка относительно указанной оси равен J , расстояние от точки опоры до центра масс волчка – l . Найти угловую скорость прецессии волчка под действием силы тяжести.



Ответ: $\Omega = \frac{mgl}{J\omega}$.

Задача 9

В точке А подвешены шарик на нити длиной l и однородный стержень длиной L . Стержень отклоняют в сторону на некоторый угол и отпускают без начальной скорости. В положении равновесия стержень упруго соударяется с шариком. При каком соотношении между массами стержня M и шарика m



стержень после удара остановится?

Ответ: $\frac{M}{m} = 3 \frac{l^2}{L^2}.$

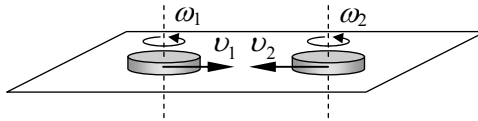
Задача 10

Частица массой m движется по эллиптической траектории под действием центральной упругой силы $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$. Минимальная скорость частицы достигается при значении ее радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ относительно силового центра, совпадающего с одним из фокусов эллипса. Найти модуль максимальной скорости частицы $v_{\max}$.

Ответ: $v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} r_0.$

Задача 11

Две одинаковые шайбы скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности со скоростями v_1 и v_2 , вращаясь с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (см. рис.). В некоторый момент времени происходит их центральное абсолютно неупругое соударение, в результате которого шайбы начинают скользить по поверхности и вращаться вместе. Считая известными массу m и радиус R каждой из шайб, найти изменение кинетической энергии шайб ΔE^k и угловую скорость их вращения ω после соударения.



Ответ: $\Delta E^k = -\frac{m}{24} [6(v_1 + v_2)^2 + 6R^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - R^2(\omega_1 + \omega_2)^2],$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{6}.$$

ГЛАВА 8

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. РЕЗОНАНС

8.1. Теоретический материал

Механические колебания – это повторяющееся ограниченное движение тел механической системы относительно некоторого своего положения. При этом обобщенные координаты, определяющие положения тел системы в пространстве (см. п. 6.1.1 в Главе 6), ограничено изменяются около некоторого своего значения (см. рис. 8.1).

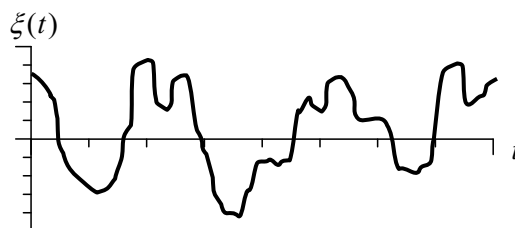


Рис. 8.1. Зависимость обобщенной координаты $\xi(t)$ от времени в случае колебаний

Периодический механический процесс – движение тел механической системы, точно повторяющееся во времени. Для системы с одной степенью свободы, этот колебательный процесс может быть описан одной физической величиной $\xi(t)$, периодически зависящей от времени (см. рис. 8.2).

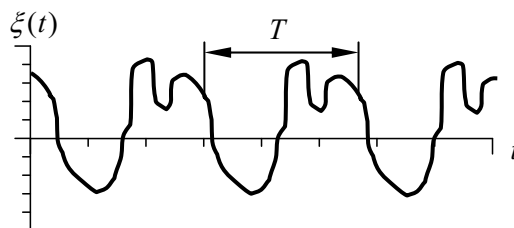


Рис. 8.2. Зависимость обобщенной координаты $\xi(t)$ от времени в случае периодического процесса

Период T – минимальный интервал времени, через который процесс в точности повторяется (рис. 8.2).

Гармонические колебания – процесс, при котором физическая величина $\xi(t)$ меняется по гармоническому закону (см. рис. 8.3).

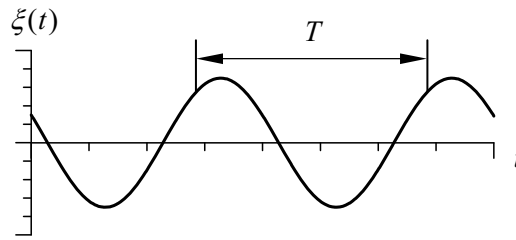


Рис. 8.3. Зависимость обобщенной координаты $\xi(t)$ от времени в случае гармонических колебаний

Свободные (собственные) колебания – колебания системы, предоставленной самой себе (при постоянных внешних условиях).

8.1.1. Собственные гармонические колебания

Уравнение собственных гармонических колебаний, которое следует из уравнений движения механической системы, имеет вид:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (8.1)$$

где ξ – одна из **обобщенных координат** – независимых физических величин, определяющих положение тел системы; ω_0 – **угловая частота** и $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – **период** собственных гармонических колебаний, определяемые характеристиками системы.

Закон движения при собственных гармонических колебаниях (зависимость обобщенной координаты от времени) – решение уравнения собственных гармонических колебаний:

$$\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.2)$$

Здесь $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – **фаза колебаний**; A – **амплитуда** и φ_0 – **начальная фаза** собственных гармонических колебаний, определяемые **начальными условиями** – значениями физической величины $\xi_0 \equiv \xi(t = t_0)$ и скоростью ее изменения $\dot{\xi}_0 \equiv \dot{\xi}(t = t_0)$ в начальный момент времени t_0 :

$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad (8.3)$$

$$\varphi_0 = -\omega_0 t_0 - \arctg\left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0 \xi_0}\right). \quad (8.4)$$

Скорость изменения обобщенной координаты $\dot{\xi}$ (обобщенная скорость):

$$\dot{\xi}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.5)$$

Как видим, в случае гармонических колебаний амплитуды обобщенной скорости и обобщенной координаты связаны множителем ω_0 , а фаза обобщенной скорости опережает фазу обобщенной координаты на $\pi/2$.

Необходимые условия существования собственных гармонических колебаний:

- 1) наличие положения устойчивого равновесия,
- 2) наличие возвращающей квазиупругой обобщенной силы.

В качестве примера рассмотрим колебания пружинного, математического и физического маятников.

Пружинный маятник – это тело, прикрепленное к невесомой пружине (см. рис. 8.4).

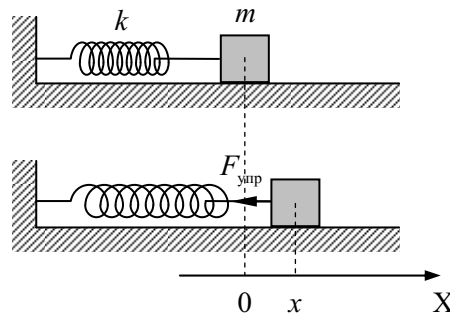


Рис. 8.4. Пружинный маятник

Рассмотрим случай горизонтального расположения пружинного маятника на гладкой горизонтальной поверхности. Ось X лабораторной инерциальной системы отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью, направим вдоль оси пружины, а ее начало

отсчета совместим с центром масс тела в положении равновесия, соответствующего нерастянутой пружине (рис. 8.4).

На тело в процессе колебаний действует упругая сила $F_{\text{упр}}$ со стороны пружины, удовлетворяющая закону Гука (см. п. 2.1. Теоретический материал в Главе 2). Уравнение движения тела в проекции на ось X выбранной системы отсчета имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (8.6)$$

где m – масса тела, k – коэффициент жесткости пружины.

Преобразуем (8.6) к виду уравнения гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (8.7)$$

Сравнивая (8.7) с (8.1), для угловой частоты колебаний пружинного маятника получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.8)$$

Заметим, что при вертикальном расположении пружинного маятника его частота не изменится. Действительно, уравнение движения маятника в этом случае записывается в виде (8.7) при выборе начала отсчета вертикальной координаты тела в положении его равновесия.

Законы движения тела, прикрепленного к пружине, и изменения его скорости аналогично (8.2) и (8.5) запишем в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.9)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.10)$$

Кинетическая энергия пружинного маятника равна кинетической энергии тела, прикрепленного к пружине:

$$\begin{aligned} E^k(t) &= \frac{m\dot{x}^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Потенциальная энергия пружинного маятника, расположенного горизонтально, равна энергии упругой деформации пружины:

$$E^p(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.12)$$

Кинетическая и потенциальная энергии пружинного маятника изменяются в противофазе по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$ и одинаковыми амплитудами (см. рис. 8.5). Механическая энергия пружинного маятника, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной в процессе колебаний:

$$E = E^k(t) + E^p(t) = \frac{kA^2}{2}. \quad (8.13)$$

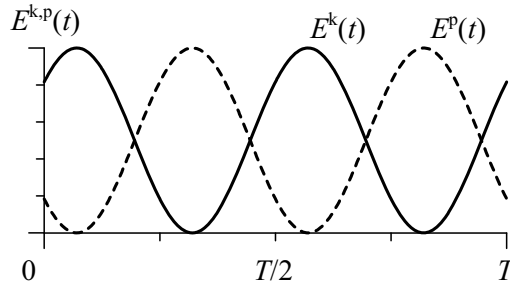


Рис. 8.5. Зависимости кинетической E^k и потенциальной E^p энергий маятника от времени в случае собственных гармонических колебаний

Математический маятник — материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити в поле сил тяжести (см. рис. 8.6).

Рассмотрим колебания математического маятника относительно горизонтальной оси, происходящие в одной плоскости.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с телом, к которому подвешен математический маятник. Запишем уравнение моментов (6.39) для материальной точки относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний маятника (см. рис. 8.6):

$$\frac{dL}{dt} = M_{mg}, \quad (8.14)$$

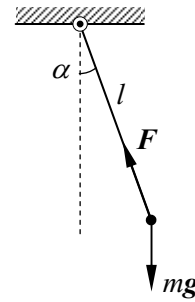


Рис. 8.6. Математический маятник

где $L = l(ml\dot{\alpha}) = ml^2\dot{\alpha}$ – момент импульса материальной точки относительно выбранной оси, α – угол отклонения маятника от положения равновесия, m и l – масса и длина математического маятника, $M_{mg} = -mgl \sin \alpha$ – момент силы тяжести, действующей на материальную точку относительно той же оси.

При малых углах отклонения маятника уравнение (8.14) сводится к виду уравнения гармонических колебаний (8.1):

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha, \quad (8.15)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0. \quad (8.16)$$

Сравнивая (8.16) с (8.1), для угловой частоты колебаний математического маятника получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (8.17)$$

Законы движения математического маятника и изменения его угловой скорости аналогично (8.2) и (8.5) запишем в виде:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.18)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.19)$$

Кинетическая энергия математического маятника равна кинетической энергии материальной точки, подвешенной на нити:

$$E^k = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} = \frac{mglA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.20)$$

Потенциальная энергия математического маятника равна энергии материальной точки в поле силы тяжести Земли. Если за ноль отсчета потенциальной энергии принять положение равновесия маятника, то его потенциальная энергия при отклонении на угол α равна:

$$E^p = mgl(1 - \cos \alpha) \cong \frac{mglA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.21)$$

Кинетическая и потенциальная энергии математического маятника, так же как и в случае пружинного маятника, изменяются в противофазе по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$ и одинаковыми амплитудами (см. рис. 8.5). Механическая энергия математического маятника не изменяется в процессе колебаний и равна:

$$E = E^k + E^p = \frac{mglA^2}{2}. \quad (8.22)$$

Физический маятник – абсолютно твердое тело, подвешенное в поле сил тяжести (см. рис. 8.7).

Рассмотрим колебания физического маятника относительно горизонтальной оси, в процессе которых все материальные точки физического маятника движутся в параллельных плоскостях.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с телом, к которому подвешен физический маятник. Запишем уравнение моментов (6.48) для абсолютно твердого тела относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний маятника (см. рис. 8.7):

$$J\ddot{\alpha} = M_{mg}. \quad (8.23)$$

Здесь α – угол отклонения маятника от положения равновесия, J – момент инерции физического маятника относительно выбранной оси, $M_{mg} = -mgl \sin \alpha$ – момент силы тяжести, действующей на материальную точку относительно той же оси, m – масса физического маятника и l – расстояние от центра масс маятника до точки его подвеса.

При малых углах отклонения маятника уравнение (8.23) сводится к виду уравнения гармонических колебаний (8.1):

$$J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha. \quad (8.24)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0. \quad (8.25)$$

Сравнивая (8.25) с (8.1), для угловой частоты колебаний физического маятника получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \quad (8.26)$$

Используя теорему Гюйгенса – Штейнера (6.42), выразим угловую частоту колебаний физического маятника через его момент инерции J_0 относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси вращения:

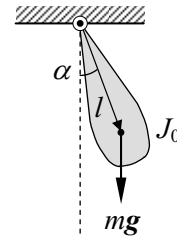


Рис. 8.7. Физический маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_0 + ml^2}}. \quad (8.27)$$

Заметим, что в случае математического и физического маятников в качестве обобщенной координаты выступает угол отклонения маятника от положения равновесия.

Законы движения физического маятника и изменения его угловой скорости идентичны случаю математического маятника:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.28)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.29)$$

Кинетическая энергия физического маятника равна (см. (7.7) в п. 7.1. Теоретический материал Главы 7):

$$E^k = \frac{J \dot{\alpha}^2}{2} = \frac{mglA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.30)$$

Если за ноль отсчета потенциальной энергии принять положение равновесия маятника, то его потенциальная энергия при отклонении на угол α можно записать в виде:

$$E^p = mgl(1 - \cos \alpha) \cong \frac{mglA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.31)$$

Механическая энергия физического маятника равна:

$$E = E^k + E^p = \frac{mglA^2}{2}. \quad (8.32)$$

8.1.2. Собственные затухающие колебания

Уравнение движения в случае собственных затухающих колебаний имеет вид:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\delta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (8.33)$$

где δ – **коэффициент затухания** (определяется характеристиками системы).

Решения уравнения (8.33) различны в зависимости от соотношения коэффициента затухания и частоты собственных незатухающих колебаний.

Случай собственных затухающих колебаний – с затуханием меньше критического ($\delta < \omega_0$).

Закон движения в этом случае имеет вид (см. рис. 8.8):

$$\xi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8.34)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ и $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ – **угловая частота и период затухающих колебаний**.

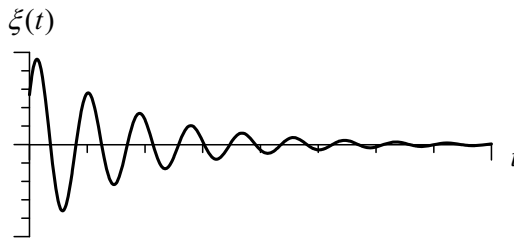


Рис. 8.8. Зависимость обобщенной координаты $\xi(t)$ от времени в случае затухающих колебаний

Логарифмический декремент затухания $\mathcal{D}$ – логарифм отношения значений обобщенной координаты в моменты времени t и $t + T$:

$$\mathcal{D} \equiv \ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+T)} = \delta T. \quad (8.35)$$

Заметим, что

$$\ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+NT)} = N\delta T = N\mathcal{D}. \quad (8.36)$$

Обратная величина логарифмического декремента затухания равна числу периодов, за которые амплитуда колебаний уменьшится в $e \cong 2.7$ раз:

$$\ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+N_e T)} = N_e \mathcal{D} = 1, \quad \frac{1}{\mathcal{D}} = N_e. \quad (8.37)$$

Средняя механическая энергия $\langle E \rangle_T$ за период T меняется со временем по экспоненциальному закону, поскольку потенциальная E^p и кинетическая E^k энергии механической системы квадратично зависят от обобщенных координат и скоростей:

$$\langle E \rangle_T = \langle E^k \rangle_T + \langle E^p \rangle_T = E_0 e^{-2\delta t}. \quad (8.38)$$

При этом **средняя мощность потерь** $\langle P \rangle_T$ равна:

$$\langle P \rangle_T \equiv - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = - \frac{d\langle E \rangle_T}{dt} = 2\delta E_0 e^{-2\delta t}. \quad (8.39)$$

Добротность колебательной системы Q определяется отношением средней за период механической энергии системы к средней мощности потерь:

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle E \rangle_T}{\langle P \rangle_T T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{2\delta E_0 e^{-2\delta t} T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\vartheta} = \frac{\omega}{2\delta}. \quad (8.40)$$

Случай аperiодического движения – с затуханием больше критического ($\delta > \omega_0$).

Закон движения в этом случае записывается в виде:

$$\xi(t) = A_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (8.41)$$

где A_1 и A_2 – постоянные величины, определяемые начальными условиями.

В зависимости от начальных условий постоянные величины A_1 и A_2 могут быть как одного, так и разных знаков.

При $\frac{A_1}{A_2} > 0$ обобщенная координата $\xi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 8.9).

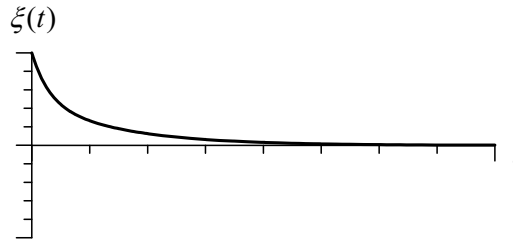


Рис. 8.9. Зависимость обобщенной координаты $\xi(t)$ от времени

в случае аperiодического движения при $\frac{A_1}{A_2} > 0$

При $\frac{A_1}{A_2} < 0$ обобщенная координата $\xi(t)$ в некоторый момент времени обращается в ноль, затем достигает локального экс-

тремума и далее монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 8.10).

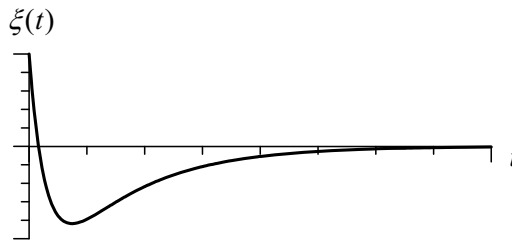


Рис. 8.10. Зависимость обобщенной координаты $\xi(t)$ от времени в случае аperiodического движения при $\frac{A_1}{A_2} < 0$

Случай критического затухания ($\delta = \omega_0$).

Закон движения в этом случае имеет вид:

$$\xi(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}, \quad (8.42)$$

где A_1 и A_2 – постоянные величины, определяемые начальными условиями.

Возможные виды зависимости обобщенной координаты от времени при различных начальных условиях изображены на рис. 8.11.

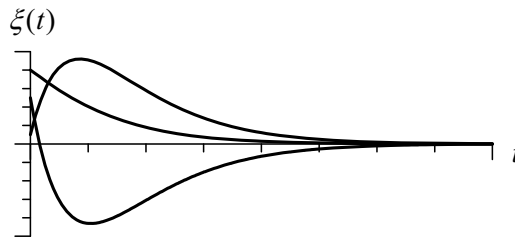


Рис. 8.11. Зависимость обобщенной координаты $\xi(t)$ от времени в случае критического затухания

Независимо от соотношения коэффициента затухания δ и частоты собственных незатухающих колебаний ω_0 обобщенная координата $\xi(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

8.1.3. Вынужденные колебания. Резонанс

Уравнение движения в случае вынужденных колебаний под действием гармонической вынуждающей силы имеет вид:

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = B\cos(pt), \quad (8.43)$$

где $B\cos(pt)$ – **обобщенная вынуждающая сила**, B и p – ее амплитуда и частота.

В частном случае пружинного маятника в качестве обобщенной вынуждающей силы выступает отношение вынуждающей силы, действующей на тело, прикрепленного к пружине, к массе этого тела.

Колебания под действием гармонической вынуждающей силы при $\delta < \omega_0$ можно представить в виде суперпозиции собственных и вынужденных колебаний. **Закон изменения обобщенной координаты** в этом случае имеет вид:

$$\xi(t) = \xi_{\text{соб}}(t) + \xi_{\text{вын}}(t) = \xi_{\text{соб}}(t) + A(p)\cos(pt + \varphi(p)). \quad (8.44)$$

Здесь $\xi_{\text{соб}}(t)$ – закон изменения обобщенной координаты при собственных затухающих колебаниях в отсутствии вынуждающей силы, $\xi_{\text{вын}}(t)$ – закон изменения обобщенной координаты после затухания собственных колебаний, $A(p)$ – амплитуда и $\varphi(p)$ – начальная фаза установившихся вынужденных колебаний $\xi_{\text{вын}}(t)$, которые зависят от частоты вынуждающей силы (см. сплошные линии на рис. 8.12 и 8.13):

$$A(p) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad (8.45)$$

$$\operatorname{tg} \varphi(p) = \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}. \quad (8.46)$$

На рис. 8.12 и рис. 8.13 штриховыми линиями изображены зависимости амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний для удвоенного значения коэффициента затухания 2δ .

При $t \gg 1/\delta$ собственными затухающими колебаниями $\xi_{\text{соб}}(t)$ можно пренебречь:

$$\xi(t) = \xi_{\text{вын}}(t) = A(p)\cos(pt + \varphi(p)). \quad (8.47)$$

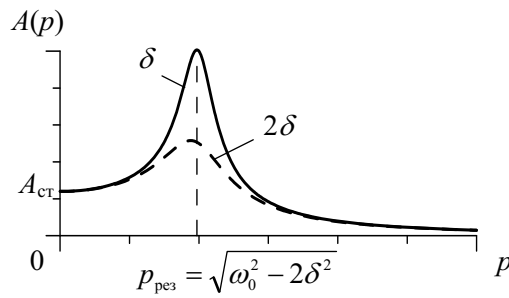


Рис. 8.12. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний $A(p)$ от частоты p при различных коэффициентах затухания δ

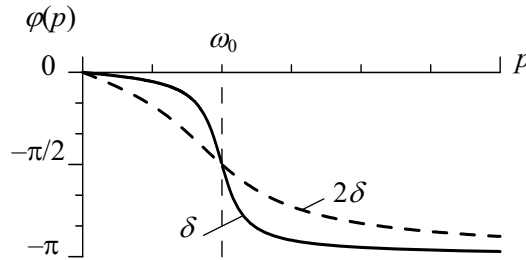


Рис. 8.13. Зависимость начальной фазы вынужденных колебаний $\varphi(p)$ от частоты p при различных коэффициентах затухания δ

Резонанс смещения (обобщенной координаты) – явление резкого возрастания амплитуды $A(p)$ вынужденных колебаний при изменении частоты вынуждающей силы (рис. 8.12).

В случае резонанса смещения **резонансная частота** $p_{\text{рез}}$ вынуждающей силы находится из условия $\frac{dA(p)}{dp} = 0$:

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (8.48)$$

При резонансной частоте амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$A_{\text{рез}} = A(p_{\text{рез}}) = \frac{B}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (8.49)$$

При постоянной ($p = 0$) обобщенной вынуждающей силе B обобщенная координата ξ будет также постоянна и равна:

$$A_{\text{ст}} = A(0) = \frac{B}{\omega_0^2}. \quad (8.50)$$

При стремлении частоты вынуждающей силы к бесконечности (при $p \gg \omega_0$) амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю (рис. 8.12):

$$A(p) \sim \frac{B}{p^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (8.51)$$

Заметим, что добротность колебательной системы может быть выражена через $A_{\text{рез}}$ и $A_{\text{ст}}$. В соответствии с (8.40), (8.49) и (8.50):

$$Q = \frac{\omega}{2\delta} \cong \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{ст}}} \quad (\text{при } \omega_0 \gg \delta). \quad (8.52)$$

Закон изменения со временем обобщенной скорости в случае вынужденных установившихся колебаний под действием гармонической вынуждающей силы имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_{\text{вын}}(t) &= -A(p)p \sin(pt + \varphi(p)) = \\ &= A(p)p \cos(pt + \varphi(p) + \pi/2). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Здесь $A(p)p$ – амплитуда изменения обобщенной скорости (см. сплошную линию на рис. 8.14):

$$A(p)p = \frac{Bp}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (8.54)$$

Штриховой линией на рис. 8.14 изображена зависимость амплитуды изменения обобщенной скорости при вынужденных колебаниях в случае удвоенного значения коэффициента затухания 2δ .

Резонанс скорости – явление резкого возрастания амплитуды $A(p)p$ изменения обобщенной скорости $\dot{\xi}(t)$ при изменении частоты вынуждающей силы (рис. 8.14).

В случае резонанса скорости резонансная частота находится из условия $\frac{d(A(p)p)}{dp} = 0$ и в соответствии с (8.54) равна:

$$p_{\text{рез}} = \omega_0. \quad (8.55)$$

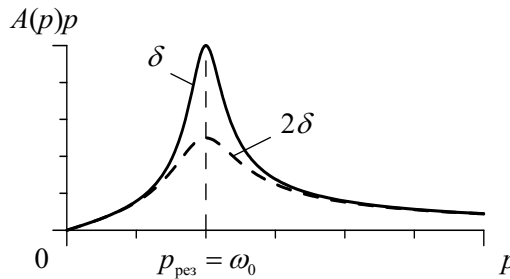


Рис. 8.14. Зависимость амплитуды изменения обобщенной скорости $A(p)p$ при вынужденных колебаниях от частоты p для различных коэффициентов затухания δ

При постоянной ($p = 0$) вынуждающей силе обобщенная скорость $\dot{\xi}(t)$ будет равна нулю (рис. 8.14):

$$(Ap)_{\text{ст}} = 0. \quad (8.56)$$

При частоте вынуждающей силы много больше частоты собственных незатухающих колебаний ($p \gg \omega_0$) амплитуда изменения обобщенной скорости близка к нулю:

$$A(p)p \sim \frac{B}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (8.57)$$

8.2. Основные типы задач и методы их решения

8.2.1. Классификация задач

Большинство задач по теме "Свободные и вынужденные колебания систем с одной степенью свободы. Резонанс" можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на:

- 1) свободные незатухающие колебания,
- 2) свободные затухающие колебания,
- 3) вынужденные колебания, резонанс.

Возможны два метода решения – так называемые динамический и энергетический методы. Динамический метод предполагает использование уравнений движения, а энергетический – закона сохранения механической энергии колеблющейся системы тел.

8.2.2. Общая схема решения задач

Если задача сводится к колебаниям материальной точки, то основные этапы решения определяются общими схемами решения задач, описанными в Главе 2 (динамический метод) и Главе 3 (энергетический метод). При решении задачи о колебаниях абсолютно твердого тела используются схемы, описанные в Главе 6 (динамический метод) и Главе 7 (энергетический метод). Как правило, при использовании обоих методов на последнем этапе решения получаются уравнение и закон движения рассматриваемой механической системы. В любом случае при решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

8.3. Примеры решения задач

Задача 8.1

(Свободные незатухающие колебания)

Сплошной однородный цилиндр массой m и радиусом R , шарнирно закрепленный в нижней точке, совершает малые колебания под действием двух горизонтальных одинаковых легких пружин, жесткость каждой из которых равна k (рис. 8.15). Пружины прикреплены к верхней точке цилиндра и нерастянуты в положении равновесия цилиндра. Определить угловую частоту малых колебаний цилиндра.

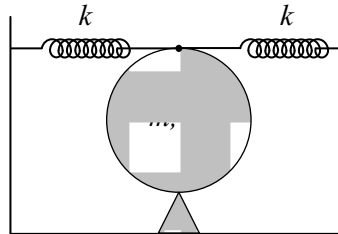


Рис. 8.15

Решение

I. Задачу решаем динамическим методом в лабораторной инерциальной системе отсчета, связанной с опорой цилиндра. Ось X декартовой системы координат направим горизонтально. Начало

отсчета оси X соответствует положению точки шарнирного закрепления цилиндра. Цилиндр считаем абсолютно твердым телом. На него действуют четыре силы (см. рис. 8.16): сила тяжести mg , упругие силы со стороны двух пружин $2F_{\text{упр}}$ и сила реакции опоры, не изображенной на рисунке. Силами трения пренебрегаем. Пружины считаем невесомыми, их деформации – малыми.

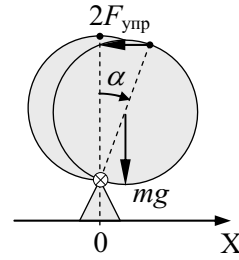


Рис. 8.16

II. Запишем уравнение моментов (см. (6.48) в Главе 6) для цилиндра относительно оси (рис. 8.16), проходящей через точку его шарнирного закрепления перпендикулярно плоскостям колебаний материальных точек цилиндра:

$$J\ddot{\alpha} = mgR \sin \alpha - 2kx(2R) \approx mgR\alpha - 4kxR. \quad (8.58)$$

Здесь J – момент инерции цилиндра относительно выбранной оси, α – угол поворота цилиндра (рис. 8.16), x – координата точки крепления пружин к цилиндру. При записи уравнения (8.58) учтено, что момент силы реакции опоры относительно оси вращения равен нулю, и при малых углах поворота цилиндра плечо силы упругости равно $2R$, а $\sin \alpha \approx \alpha$.

Запишем уравнение кинематической связи – уравнение, связывающее координату точки крепления пружин к цилиндру и угол его поворота:

$$x = 2R\alpha. \quad (8.59)$$

Момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через точку его шарнирного крепления, находим в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера (см. (6.42) в Главе 6):

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \quad (8.60)$$

III. Подставляя выражения (8.59) и (8.60) в (8.58), получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{2}{3} \left(\frac{8k}{m} - \frac{g}{R} \right) \alpha = 0. \quad (8.61)$$

Следовательно, искомая угловая частота собственных незатухающих колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{8k}{m} - \frac{g}{R} \right)}. \quad (8.62)$$

Полученное выражение для частоты колебаний справедливо при $\frac{8k}{m} > \frac{g}{R}$. Если $\frac{8k}{m} \leq \frac{g}{R}$, то вертикальное равновесное состояние является неустойчивым и колебания в системе не возникают (см. в п. 8.1.1 необходимые условия существования собственных гармонических колебаний).

Задача 8.2

(Свободные незатухающие колебания)

Тонкая однородная палочка совершает малые колебания внутри гладкого полуцилиндра радиусом R , оставаясь в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (рис. 8.17).

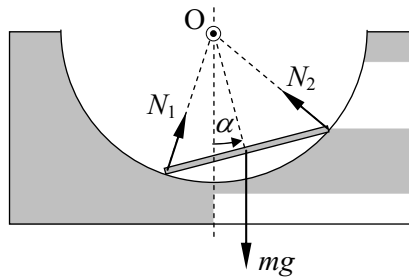


Рис. 8.17

Длина палочки равна радиусу полуцилиндра. Найти закон движения центра масс палочки, считая, что в начальный момент времени она покоилась и была отклонена от положения равновесия на малый угол α_0 .

Решение

I. Задачу решаем динамическим методом в лабораторной инерциальной системе отсчета, связанной с полуцилиндром. Палочку считаем абсолютно твердым телом. На нее действуют три силы – сила тяжести mg и силы нормальной реакции поверхности полуцилиндра N_1 и N_2 (рис. 8.17). Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Запишем уравнение моментов (см. (6.48) в Главе 6) для палочки относительно оси, совпадающей с осью полуцилиндра, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 8.17):

$$J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha, \quad (8.63)$$

где J – момент инерции палочки относительно указанной оси, α – угол отклонения палочки от положения равновесия, l – расстояние от оси вращения до центра масс палочки. При записи (8.63) учтено, что моменты сил нормальной реакции поверхности полуцилиндра N_1 и N_2 относительно оси вращения равны нулю.

Поскольку длина палочки равна радиусу цилиндра, то расстояние от оси вращения до центра масс палочки равно:

$$l = R \sin(\pi/3) = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \quad (8.64)$$

Момент инерции палочки относительно указанной оси находим в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера (6.42):

$$J = J_0 + ml^2. \quad (8.65)$$

Момент инерции тонкой палочки относительно оси, проходящей через ее центр масс, равен:

$$J_0 = \frac{mR^2}{12}. \quad (8.66)$$

III. Преобразуя систему уравнений (8.63) – (8.66) с учетом малости угла отклонения палочки от положения равновесия ($\sin \alpha \approx \alpha$), получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{3\sqrt{3}g}{5R} \alpha = 0. \quad (8.67)$$

Как видим (ср. с (8.1)), частота собственных колебаний палочки определяется соотношением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}}, \quad (8.68)$$

а закон движения (решение уравнения движения (8.67)) имеет вид:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.69)$$

Амплитуда A и начальная фаза φ_0 в соответствии с условиями задачи определяются начальными значениями угла отклонения и скорости его изменения:

$$\alpha(0) = \alpha_0 = A \cos \varphi_0, \quad \dot{\alpha}(0) = 0 = -A \sin \varphi_0. \quad (8.70)$$

Совместное решение уравнений (8.70) дает значения амплитуды и начальной фазы:

$$A = \alpha_0, \quad \varphi_0 = 0. \quad (8.71)$$

В результате искомый закон движения центра масс палочки принимает вид:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}} t \right). \quad (8.72)$$

Задача 8.3

(Свободные незатухающие колебания)

На тележке массой M , стоящей на горизонтальных рельсах, подвешен математический маятник длиной l и массой m . Тележка может катиться по рельсам без трения. Тележке сообщили начальную скорость V_0 так, что при этом нить маятника осталась вертикальной. Найти законы движения маятника и тележки относительно лабораторной системы отсчета при малых углах отклонения нити маятника от вертикали. Определить, при каких соотношениях масс маятника и тележки амплитуды их колебаний A_m и A_M будут максимальными.

Решение

I. При решении задачи используем две системы отсчета: инерциальную лабораторную систему, связанную с рельсами, и неинерциальную, связанную с тележкой. Направим ось X инерциальной системы отсчета вдоль рельсов, по которым катится тележка (см. рис. 8.18), начало отсчета которой совпадает с положением маятника в начальный момент времени.

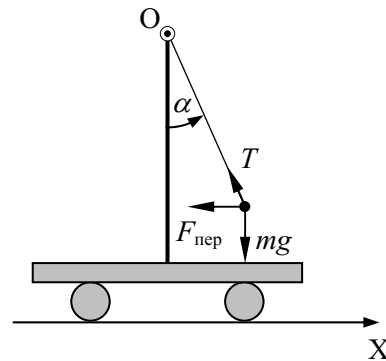


Рис. 8.18

После сообщения начальной скорости V_0 тележке маятник в неинерциальной системе отсчета будет колебаться относительно неподвижной оси, проходящей через точку подвеса O , в то время как в инерциальной системе отсчета его движение является супер-

позицией поступательного движения вместе с тележкой и колебательного движения относительно тележки.

Задачу решаем динамическим методом. На маятник в неинерциальной системе отсчета действуют три силы (рис. 8.18) – сила тяжести mg , сила натяжения нити T и переносная сила инерции $F_{\text{пер}}$. Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Переносная сила инерции, действующая на маятник, в соответствии с (4.16) в п. 4.1. Теоретический материал Главы 4 равна:

$$F_{\text{пер}} = -m\ddot{x}_M, \quad (8.73)$$

где $\ddot{x}_M$ – ускорение тележки (и жестко связанной с ней неинерциальной системы) относительно инерциальной системы отсчета.

Запишем уравнение вращательного движения (уравнение моментов; см. (6.48) в п. 6.1.2 Главы 6) маятника в неинерциальной системе отсчета относительно оси, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 8.18):

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha - m\ddot{x}_M l \cos \alpha, \quad (8.74)$$

где α – угол отклонения маятника от вертикали (см. рис. 8.18). При записи уравнения (8.74) учтено, что относительно выбранной оси момент инерции маятника равен ml^2 , а момент силы натяжения нити равен нулю.

В соответствии с принципом суперпозиции движений координата маятника $x_m(t)$ относительно инерциальной системы отсчета равна:

$$x_m(t) = x_M(t) + l \sin \alpha(t), \quad (8.75)$$

где $x_M(t)$ – координата точки подвеса маятника, жестко связанной с тележкой, относительно инерциальной системы отсчета.

Уравнение кинематической связи (уравнение, связывающее угловое ускорение маятника $\ddot{\alpha}(t)$ и ускорение тележки $\ddot{x}_M(t)$) можно получить, рассматривая движение центра масс системы тел «маятник + тележка» относительно инерциальной системы отсчета. Координата центра масс $x_{\text{цм}}$ системы тел (см. (3.1) в п. 3.1. Теоретический материал Главы 3) равна:

$$x_{\text{цм}} = \frac{mx_m + Mx_M}{m + M}. \quad (8.76)$$

По условию задачи на указанную систему тел не действуют внешние силы вдоль оси X (силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем), следовательно, в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение центра масс равно нулю:

$$\ddot{x}_{\text{цм}} = 0. \quad (8.77)$$

При этом центр масс данной системы тел в зависимости от начальных условий будет двигаться вдоль оси X с постоянной скоростью или покоиться.

Дифференцируя (8.76) дважды по времени с учетом (8.75) и (8.77), получаем следующее уравнение кинематической связи для ускорений:

$$(m + M)\ddot{x}_M + ml(-\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \ddot{\alpha} \cos \alpha) = 0. \quad (8.78)$$

При малых углах отклонения маятника ($\sin \alpha \cong \alpha$) уравнения (8.74), (8.75) и (8.78) преобразуются к виду:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mgl\alpha - m\ddot{x}_M l, \quad (8.79)$$

$$x_m(t) = x_M(t) + l\alpha(t), \quad (8.80)$$

$$(m + M)\ddot{x}_M + ml\ddot{\alpha} = 0. \quad (8.81)$$

Полученная система уравнений (8.79) – (8.81) позволяет найти искомые законы движения маятника $x_m(t)$ и тележки $x_M(t)$ относительно лабораторной инерциальной системы отсчета.

III. Преобразуя систему уравнений (8.79) – (8.81), получаем уравнение гармонических колебаний (см. формулу (8.1) в п. 8.1.1. Собственные гармонические колебания) маятника относительно тележки:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}(1 + m/M)\alpha = 0. \quad (8.82)$$

Следовательно, частота собственных колебаний маятника ω_0 равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}(1 + m/M)}. \quad (8.83)$$

На рис. 8.19 изображена зависимость частоты колебаний маятника ω_0 от отношения масс m/M маятника и тележки (при $l = 2$ м). Отметим, что при увеличении массы маятника частота колебаний монотонно возрастает, а при достаточно малой массе маятника $m \ll M$ частота его колебаний совпадает с частотой коле-

баний математического маятника с неподвижной точкой подвеса

$$(8.17) - \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

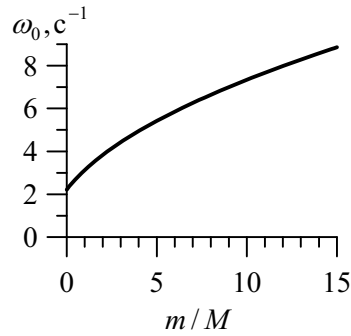


Рис. 8.19

Решением уравнения (8.82) является гармоническая функция:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.84)$$

Амплитуда A и начальная фаза φ_0 в (8.84) определяются начальными условиями, которые в соответствии с условиями задачи записываются в виде:

$$\alpha(t=0) = 0, \quad (8.85)$$

$$\dot{\alpha}(t=0) = -\frac{V_0}{l}. \quad (8.86)$$

В результате для угла отклонения маятника имеем:

$$\alpha(t) = \frac{V_0}{l\omega_0} \cos(\omega_0 t + \pi/2) = -\frac{V_0}{l\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (8.87)$$

Дифференцируя (8.87) дважды по времени и подставляя $\ddot{\alpha}$ в (8.81) получаем дифференциальное уравнение второго порядка для координаты тележки x_M :

$$\ddot{x}_M = -\frac{m/M}{1+m/M} V_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t). \quad (8.88)$$

Интегрируя (8.88) с начальными условиями

$$x_M(t=0) = 0, \quad (8.89)$$

$$\dot{x}_M(t=0) = V_0, \quad (8.90)$$

находим искомый закон движения тележки относительно лабораторной инерциальной системы отсчета:

$$x_M(t) = \frac{1}{1 + m/M} V_0 t + A_M \sin(\omega_0 t), \quad (8.91)$$

где

$$A_M = \frac{m/M}{1 + m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0}. \quad (8.92)$$

На рис. 8.20 изображены зависимости координаты тележки $x_M(t)$ от времени при различных значениях отношения масс m/M маятника и тележки.

Зависимости получены в соответствии с (8.91) при значениях начальной скорости тележки $V_0 = 1 \text{ м/с}$ и длины маятника $l = 2 \text{ м}$. Как видим, поступательное движение тележки представляет собой суперпозицию движения с постоянной скоростью $\frac{1}{1 + m/M} V_0$ и гармонических колебаний с частотой ω_0 и амплитудой A_M (см. (8.91)).

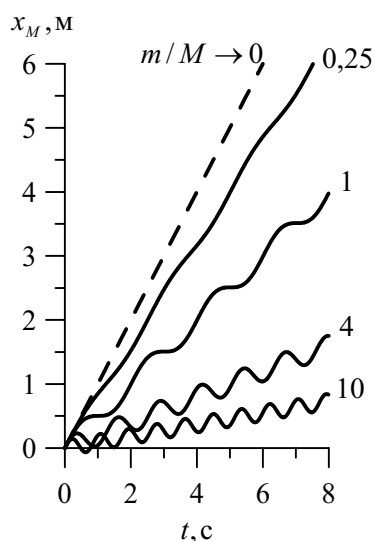


Рис. 8.20

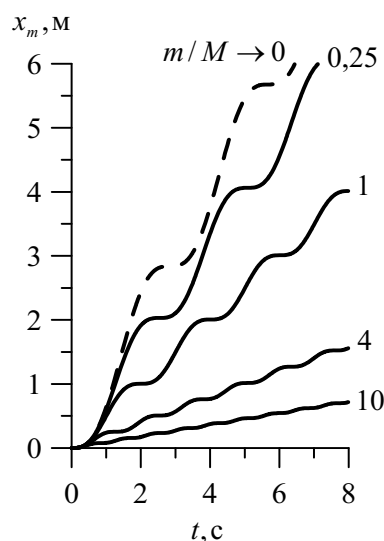


Рис. 8.21

Заметим, что при достаточно малой массе маятника $m \ll M$ колебательное движение тележки практически незаметно, поскольку происходит с малыми амплитудой A_M и частотой.

Искомый закон движения маятника $x_m(t)$ относительно лабораторной инерциальной системы отсчета находим, используя принцип суперпозиции движений (8.90) и полученные законы изменения угла отклонения $\alpha(t)$ маятника (8.87) и движения $x_M(t)$ тележки (8.91):

$$x_m(t) = \frac{1}{1 + m/M} V_0 t - A_m \sin(\omega_0 t), \quad (8.93)$$

где

$$A_m = \frac{1}{1 + m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0}. \quad (8.94)$$

На рис. 8.21 изображены зависимости координаты маятника $x_m(t)$ от времени при различных значениях отношения масс m/M маятника и тележки. Зависимости получены в соответствии с (8.93) при тех же значениях начальной скорости тележки и длины маятника, что и в случае расчета зависимостей координаты тележки (см. рис. 8.20). Как видим, движение маятника, как и в случае тележки, представляет собой суперпозицию движения с той же постоянной скоростью $\frac{1}{1 + m/M} V_0$ и гармонических колебаний с той же частотой ω_0 , но другой амплитудой A_m (см. (8.94)). Заметим, что колебательное движение маятника практически незаметно при достаточно большой массе маятника $m \gg M$, поскольку происходит с малой амплитудой A_m .

На рис. 8.22 изображены зависимости амплитуд колебаний тележки A_M и маятника A_m от соотношения их масс при указанных выше значениях начальной скорости тележки и длины маятника. Как видим, амплитуда колебаний маятника A_m монотонно уменьшается с увеличением отношения масс m/M . При этом амплитуда колебаний тележки A_M сначала возрастает, достигая максимума, а затем монотонно убывает.

Амплитуда колебаний маятника A_m в соответствии с (8.94) стремится к своему максимально-му значению $A_m^{\max} = V_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$ при неограниченном уменьшении отношения масс маятника и тележки $m/M \rightarrow 0$.

Амплитуда колебаний тележки A_M в соответствии с (8.92) максимальна при значении отношения масс маятника и тележки $m/M = 2$ независимо от начальной скорости тележки и длины маятника и равна $A_M^{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} V_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

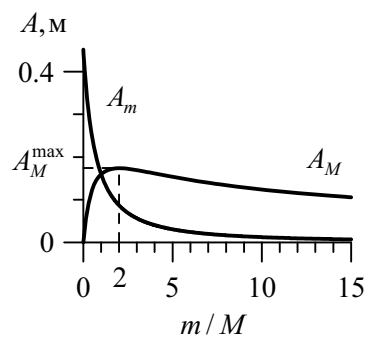


Рис. 8.22

Задача 8.4

(Свободные незатухающие колебания)

Тело вращения с максимальным радиусом r , моментом инерции J (относительно его оси симметрии) и массой m катается без проскальзывания по цилиндрической поверхности опоры радиусом R , совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 8.23). Найти частоту этих колебаний.

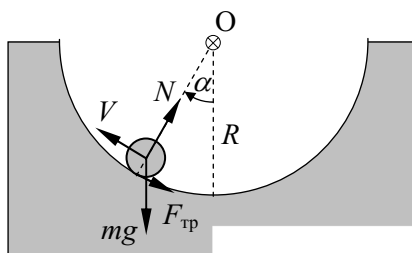


Рис. 8.23

Решение

I. На тело в процессе движения действуют сила тяжести mg , сила нормальной реакции опоры N и сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ в точке соприкосновения тела с цилиндрической поверхностью (см. рис. 8.23). Силой сопротивления воздуха пренебрегаем. Тело вращения и опору считаем абсолютно твердыми телами, поэтому трение качения не учитываем.

Задачу решаем энергетическим методом. Механическая энергия тела, катающегося без проскальзывания по цилиндрической поверхности, сохраняется, поскольку суммарная работа всех непотенциальных сил, действующих на него, равна нулю (см. п. 3.1.3 в Главе 3).

II. Кинетическая энергия тела по теореме Кенига равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью, равной скорости центра масс V , и энергии вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр масс (см. (7.10) в п. 7.1. Теоретический материал в Главе 7):

$$E^k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (8.95)$$

Здесь J – момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс, а скорость центра масс тела в соответствии с рис. 8.22 равна

$$V = (R - r)\dot{\alpha}, \quad (8.96)$$

где α – угол, задающий положение центра масс тела на цилиндрической поверхности.

Если принять потенциальную энергию тела в положении его равновесия равной нулю, то при отклонении центра масс на угол α потенциальная энергия становится равной (см. рис. 8.23)

$$E^p = mg(R - r)(1 - \cos \alpha) \approx \frac{mg}{2}(R - r)\alpha^2. \quad (8.97)$$

Поскольку механическая энергия тела сохраняется, то

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^k + E^p) = 0. \quad (8.98)$$

Поскольку тело осуществляет плоское движение, рассмотрим это движение как вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью ω . По условию задачи качение происходит без проскальзывания, следовательно, мгновенная ось вращения проходит через

точки соприкосновения тела с цилиндрической поверхностью и скорость центра масс тела равна:

$$V = \omega r. \quad (8.99)$$

Приравнявая правые части выражений (8.96) и (8.99) для скорости центра масс, получаем уравнение кинематической связи для угловой скорости вращения ω тела вокруг оси, проходящей через центр масс, и угловой скорости вращения $\dot{\alpha}$ центра масс вокруг геометрической оси цилиндрической поверхности:

$$\omega = \frac{R-r}{r} \dot{\alpha}. \quad (8.100)$$

III. Решая совместно уравнения (8.95) – (8.98) и (8.100), получаем уравнение гармонических колебаний тела:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgr^2}{(R-r)(mr^2 + J)} \alpha = 0. \quad (8.101)$$

Сравнивая (8.101) с (8.1), получаем искомое выражение для частоты собственных гармонических колебаний тела вращения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr^2}{(R-r)(mr^2 + J)}}. \quad (8.102)$$

В частности, для сплошного цилиндра $\left(J_{\text{цил}} = \frac{mr^2}{2}\right)$ и шара

$\left(J_{\text{шар}} = \frac{2}{5}mr^2\right)$ полученное выражение принимает вид:

$$\omega_{0\text{цил}} = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}, \quad (8.103)$$

$$\omega_{0\text{шар}} = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}. \quad (8.104)$$

Задача 8.5

(Свободные незатухающие колебания)

Определить частоту ω_0 малых собственных гармонических колебаний жидкости в тонкой трубке U-образной формы с изменяющимся вдоль трубки поперечным сечением, помещенной в поле сил тяжести Земли. Считать заданной зависимость площади по-

перечного сечения трубки S от координаты s вдоль трубки, а также длину заполненной жидкостью части трубки L .

Решение

I. Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, жидкость будем считать невязкой и несжимаемой. Задачу решаем энергетическим методом. Примем за ноль отсчета потенциальной энергии жидкости ее положение равновесия. По условию задачи сообщающиеся сосуды имеют неправильную форму, следовательно, смещение различных частиц жидкости при колебаниях будет различно, в отличие от колебаний в трубке с постоянным поперечным сечением. Введем обозначения: A_1 – амплитуда малых гармонических колебаний жидкости в левом колене трубки, A_2 – амплитуда малых гармонических колебаний в правом колене, ρ – плотность жидкости.

II. Пусть площадь поперечного сечения трубки есть известная функция координаты вдоль трубки $S(s)$. Масса всей жидкости равна $m = \int_0^L \rho S ds$ (L – длина заполненной жидкостью части трубки).

Колебания считаем малыми, поэтому площадь поперечного сечения трубки на расстоянии двойной амплитуды колебаний можно считать неизменной. Следовательно, если S_1 и S_2 – площади сечения правой и левой свободных поверхностей несжимаемой жидкости в трубке соответственно, то

$$A_1 S_1 = A_2 S_2. \quad (8.105)$$

Будем отсчитывать координату s от левой свободной поверхности жидкости в положении равновесия. Координата правой свободной поверхности в положении равновесия равна длине столба жидкости $s = L$. Амплитуду колебаний A в сечении с произвольной координатой $0 \leq s \leq L$ площадью S находим из условия $A_1 S_1 = AS$, аналогичного (8.105). Тогда в случае гармонических колебаний амплитуда V колебаний скорости частиц жидкости в сечении трубки с координатой s равна

$$V = \omega_0 A = \omega_0 A_1 \frac{S_1}{S}. \quad (8.106)$$

Запишем кинетическую энергию всей жидкости в момент прохождения ею положения равновесия:

$$E_{\max}^k = \int_0^L \frac{\rho S ds V^2}{2} = \frac{\rho \omega_0^2 A_1^2 S_1^2}{2} \int_0^L \frac{ds}{S}. \quad (8.107)$$

Через четверть периода вся энергия будет потенциальной и определяться работой сил тяжести по перемещению объема жидкости $A_1 S_1 = A_2 S_2$ на высоту $\frac{A_1 + A_2}{2}$:

$$E_{\max}^p = \rho S_1 A_1 \frac{A_1 + A_2}{2} g = \frac{\rho S_1 A_1^2 g}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (8.108)$$

Поскольку силами вязкого трения и сопротивления воздуха пренебрегаем, механическая энергия жидкости сохраняется:

$$E_{\max}^k = E_{\max}^p. \quad (8.109)$$

III. Подставляя (8.107) и (8.108) в (8.109), получим уравнение для частоты собственных колебаний жидкости ω_0 :

$$\frac{\rho \omega_0^2 A_1^2 S_1^2}{2} \int_0^L \frac{ds}{S} = \frac{\rho S_1 A_1^2 g}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (8.110)$$

Из (8.110) непосредственно следует выражение для искомой частоты собственных колебаний жидкости в трубке:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g(S_1 + S_2)}{S_1 S_2 \int_0^L \frac{ds}{S}}}. \quad (8.111)$$

Полученное выражение (8.111) при $S = \text{const}$ переходит в известную формулу для частоты собственных колебаний жидкости в U-образной трубке с постоянным поперечным сечением:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}. \quad (8.112)$$

Задача 8.6

(Свободные затухающие колебания)

Ступенчатый цилиндрический блок может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, совпадающей с осью симметрии блока. Радиусы цилиндров блока – R и r . Момент инерции блока относительно указанной оси равен J . На цилиндры намотаны две невесомые нерастяжимые нити, начала которых закреплены на разных цилиндрах. На конце правой нити висит

тело массой m . Конец левой нити прикреплен к легкой пружине с коэффициентом жесткости k , нижний конец которой закреплен так, что ось пружины вертикальна (рис. 8.24). Тело совершает малые вертикальные колебания в жидкости с коэффициентом вязкого трения η . Определить закон движения тела, если в положении равновесия ему сообщили скорость V_0 .

Решение

I. Задачу решаем динамическим методом в лабораторной инерциальной системе отсчета. Направим ось X декартовой системы координат вертикально вниз (см. рис. 8.25). На тело массой m действуют четыре силы – сила тяжести mg , сила Архимеда $F_{\text{Арх}}$, сила натяжения нити T_1 и сила вязкого трения, пропорциональная скорости тела $F_{\text{тр}} = -\eta \dot{x}$ (см. (2.12) в п. 2.1.2.В Главы 2). Под действием указанных сил тело совершает вертикальные затухающие колебания.

II. Запишем уравнение движения тела в проекции на ось X :

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{Арх}} - T_1 - \eta \dot{x}. \quad (8.113)$$

Запишем также уравнение моментов для блока относительно закрепленной оси, совпадающей с осью симметрии блока и направленной за плоскость чертежа (рис. 8.25):

$$J\ddot{\alpha} = T_1 r - T_2 R. \quad (8.114)$$

Здесь α – угол поворота блока, T_1 и T_2 – силы натяжения правой и левой нитей, действующие на блок.

Нить считаем невесомой, следовательно, сила натяжения левой нити равна силе упругости, с которой пружина действует на нить:

$$T_2 = k(x_{\text{пр}} - x_{\text{пр},0}), \quad (8.115)$$

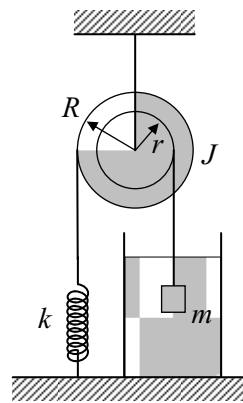


Рис. 8.24

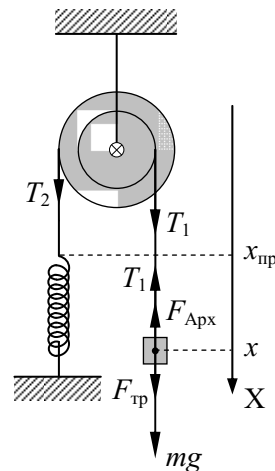


Рис. 8.25

где $x_{\text{пр}}$ – координата точки крепления левой нити к пружине, $x_{\text{пр},0}$ – координата той же точки при нерастянутой пружине.

Поскольку нити по условию задачи нерастяжимы, изменение угла поворота блока и изменение координат тела и точки крепления нити к пружине связаны соотношениями:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{r}, \quad (8.116)$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x_{\text{пр}}}{R}. \quad (8.117)$$

Дифференцируя (8.116) по времени, получаем уравнение кинематической связи углового ускорения блока и ускорения тела:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\ddot{x}}{r}. \quad (8.118)$$

Исключая изменение угла поворота блока $\Delta\alpha$ из (8.116) и (8.117), получаем уравнение кинематической связи изменений координат точки крепления левой нити к пружине и тела:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \Delta x \frac{R}{r}. \quad (8.119)$$

Воспользовавшись (8.119), преобразуем (8.115) к виду:

$$T_2 = k(x - x_0) \frac{R}{r}, \quad (8.120)$$

где x_0 – координата тела в положении, когда пружина не растянута.

В результате записана полная система уравнений (8.113), (8.114), (8.118) и (8.120), которая с учетом начальных условий позволяет получить закон движения тела.

III. Исключая α , T_1 и T_2 из системы уравнений (8.113), (8.114), (8.118) и (8.120), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для координаты тела x :

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} + \eta\dot{x} - mg + F_{\text{Арх}} + k(x - x_0) \frac{R^2}{r^2} = 0. \quad (8.121)$$

Найдем координату тела $x_{\text{равн}}$ в положении равновесия, при котором отсутствуют колебания ($\dot{x} = 0$ и $\ddot{x} = 0$):

$$x_{\text{равн}} = x_0 + (mg - F_{\text{Арх}}) \frac{r^2}{kR^2}. \quad (8.122)$$

Сделаем замену переменных, означающую введение координаты тела ξ , отсчитываемой от положения равновесия:

$$\xi = x - x_{\text{равн}}. \quad (8.123)$$

В этом случае из (8.121) получим уравнение для координаты тела ξ :

$$\ddot{\xi} + \frac{\eta r^2}{mr^2 + J} \dot{\xi} + \frac{kR^2}{mr^2 + J} \xi = 0, \quad (8.124)$$

которое имеет вид уравнения затухающих колебаний (см. (8.33) в п. 8.1. Теоретический материал).

Сравнивая полученное уравнение с (8.33), для коэффициента затухания δ и частоты собственных незатухающих колебаний ω_0 можно записать:

$$\delta = \frac{\eta r^2}{2(mr^2 + J)}, \quad (8.125)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2}{mr^2 + J}}. \quad (8.126)$$

Решением уравнения (8.124) является функция

$$\xi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (8.127)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний, определяемая параметрами рассматриваемой колебательной системы, A – амплитуда и φ_0 – начальная фаза, определяемые начальными условиями.

При произвольном выборе начала отсчета лабораторной системы координат закон движения тела будет иметь вид:

$$x(t) = x_{\text{равн}} + Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (8.128)$$

С учетом начальных условий, заданных в задаче,

$$x(t=0) = x_{\text{равн}}, \quad (8.129)$$

$$\dot{x}(t=0) = V_0 \quad (8.130)$$

находим амплитуду колебаний тела A и начальную фазу φ_0 :

$$A = \frac{V_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad (8.131)$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}. \quad (8.132)$$

Искомый в задаче закон движения тела описывает затухающие колебания относительно положения равновесия (см. рис. 8.26):

$$x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t). \quad (8.133)$$

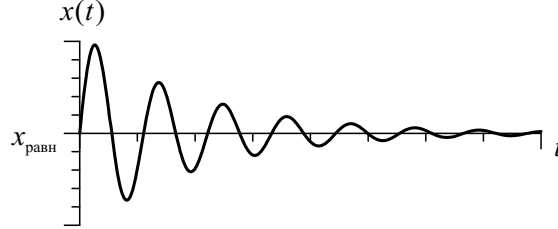


Рис. 8.26

Следует отметить, что полученное решение справедливо при малом затухании, когда $\delta < \omega_0$ (см. п. 8.1.2. Собственные затухающие колебания). Если неравенство не выполняется, то решением уравнения (8.121) является функция (8.41)

$$x(t) = x_{\text{равн}} + A_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (8.134)$$

где коэффициенты A_1 и A_2 определяются начальными условиями (8.129) и (8.130):

$$A_1 = -A_2 = \frac{V_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \quad (8.135)$$

При этом закон движения тела принимает вид:

$$x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left(e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \right). \quad (8.136)$$

Выражение (8.136) описывает апериодический процесс (см. рис. 8.27), при котором в системе не возникает колебаний, она экспоненциально приближается к положению равновесия.

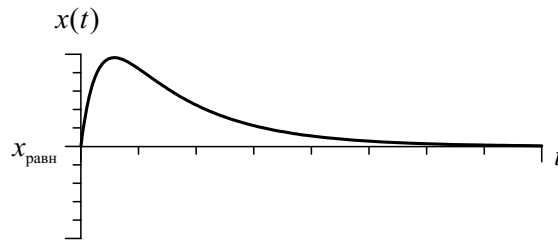


Рис. 8.27

Задача 8.7

(Свободные затухающие колебания)

Тонкий однородный диск массой m и радиусом R , подвешенный в горизонтальном положении к упругой нити, отклонили на угол α_0 от положения равновесия и отпустили с нулевой начальной угловой скоростью. Диск совершает крутильные колебания в вязкой жидкости (см. рис. 8.28). Сила вязкого трения, действующая на единицу площади поверхности диска со стороны жидкости, равна $f_v = -\eta v$, где $\eta = \text{const}$, v – скорость данного элемента диска относительно жидкости. Момент упругих сил со стороны нити равен $M_{\text{упр}} = D\alpha$, где D – постоянный коэффициент, α – угол поворота диска относительно положения равновесия. Найти закон движения диска.

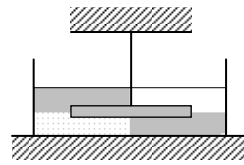


Рис. 8.28

Решение

I. Используем динамический метод решения задачи. Диск будем считать абсолютно твердым телом. На него действуют три силы: сила тяжести, упругая сила со стороны нити и сила вязкого трения, действующая со стороны жидкости. Под действием указанных сил диск совершает затухающие крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через центр диска.

II. Запишем уравнение моментов (см. (6.48) в п. 6.1.2. Главы 6) для диска относительно вертикальной оси, проходящей через его центр:

$$J\ddot{\alpha} = M_{\text{упр}} + M_v, \quad (8.137)$$

где J – момент инерции диска относительно оси вращения, M_v – момент сил вязкого трения. Момент силы тяжести относительно указанной оси равен нулю.

Момент инерции диска относительно его оси, совпадающей с осью вращения, равен (см. (6.44) в Главе 6):

$$J = \frac{mR^2}{2}. \quad (8.138)$$

Запишем момент dM_v силы трения, действующей на кольцеобразный элемент поверхности диска радиусом r и площадью $dS = 2\pi r dr$:

$$dM_v = -2\pi r dr \eta v r = -2\pi r^3 \eta dr \dot{\alpha}. \quad (8.139)$$

Учитывая, что сила вязкого трения действует на обе поверхности диска, найдем суммарный момент сил трения, интегрируя по обеим поверхностям диска:

$$M_v = -2 \cdot 2\pi \eta \dot{\alpha} \int_0^R r^3 dr = -\pi \eta R^4 \dot{\alpha}. \quad (8.140)$$

III. Уравнение движения диска получаем подстановкой (8.140) в (8.137) с учетом (8.138) и заданного в условии задачи выражения для момента упругих сил:

$$\ddot{\alpha} + \frac{2\pi \eta R^2}{m} \dot{\alpha} + \frac{2D}{mR^2} \alpha = 0. \quad (8.141)$$

Сравнивая (8.141) с уравнением затухающих колебаний (8.33), получим выражения для коэффициента затухания δ и частоты собственных незатухающих колебаний диска ω_0 :

$$\delta = \frac{\pi \eta R^2}{m}, \quad (8.142)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{mR^2}}. \quad (8.143)$$

В случае слабого затухания ($\delta < \omega_0$) решение уравнения (8.141) имеет вид (см. (8.34)):

$$\alpha = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (8.144)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота собственных затухающих колебаний диска, A – амплитуда, φ_0 – начальная фаза.

С учетом начальных условий, заданных в задаче,

$$\alpha(t=0) = \alpha_0, \quad (8.145)$$

$$\dot{\alpha}(t=0) = 0 \quad (8.146)$$

находим амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний диска:

$$A = \alpha_0, \quad (8.147)$$

$$\varphi_0 = 0. \quad (8.148)$$

Искомый в задаче закон движения диска описывает затухающие колебания относительно положения равновесия (см. рис. 8.29):

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t), \quad (8.149)$$

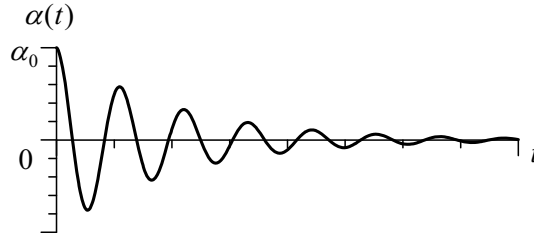


Рис. 8.29

Полученное решение справедливо при малом затухании колебаний, когда $\delta < \omega_0$ (см. п. 8.1.2. Собственные затухающие колебания). Если неравенство не выполняется, то решением уравнения (8.141) является функция (8.41)

$$\alpha(t) = A_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (8.150)$$

где коэффициенты A_1 и A_2 определяются начальными условиями (8.145) и (8.146):

$$A_1 = \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right). \quad (8.151)$$

$$A_2 = \frac{\alpha_0}{2} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right). \quad (8.152)$$

При этом закон движения диска в жидкости принимает вид:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) t} + \frac{\alpha_0}{2} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) t}. \quad (8.153)$$

Выражение (8.153) описывает аperiодический процесс (см. рис. 8.30), при котором в системе не возникает колебаний, она экспоненциально приближается к положению равновесия.

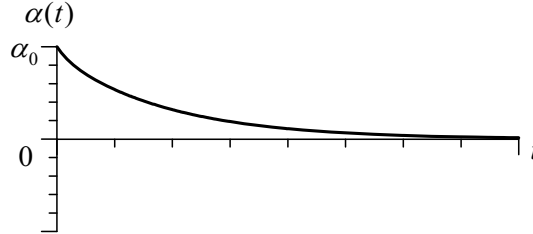


Рис. 8.30

Задача 8.8

(Вынужденные колебания, резонанс)

Тело массой $m = 100$ г, подвешенное на легкой пружине жесткостью $k = 40$ Н/м, совершает установившиеся колебания под действием вертикальной вынуждающей силы $F = F_0 \cos pt$, частота которой $p = 25$ рад/с и амплитуда $F_0 = 1$ Н. Смещение тела из положения равновесия отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = -3\pi/4$. Определить добротность колебательной системы Q , а также резонансную частоту $p_{\text{рез}}$, соответствующие резонансу смещения, и амплитуду смещения при резонансе $A_{\text{рез}}$.

Решение

I. На тело, подвешенное на пружине действуют четыре силы: сила тяжести, сила упругости со стороны пружины, сила сопротивления воздуха и вынуждающая сила $F = F_0 \cos pt$. Как было отмечено в п. 8.1.1, постоянная сила тяжести не влияет на частоту собственных колебаний, она лишь смещает положение равновесия.

Поэтому решение задачи будет справедливо как при вертикальных, так и при горизонтальных колебаниях тела на пружине. По условию задачи пружина легкая, ее массой пренебрегаем, считая ее равной нулю.

II. Искомая добротность колебательной системы определяется выражением (8.40):

$$Q = \frac{\omega}{2\delta}. \quad (8.154)$$

Здесь ω – частота собственных затухающих колебаний тела, которая в соответствии с п. 8.1.2 равна:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (8.155)$$

Частота собственных незатухающих колебаний ω_0 тела на невесомой пружине (см. (8.8)) определяется массой тела m и коэффициентом жесткости пружины k :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.156)$$

Коэффициент затухания δ , входящий в формулы (8.154) и (8.155), определяет заданный в условии задачи фазовый сдвиг φ между смещением и вынуждающей силой в соответствии с выражением (8.46):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}. \quad (8.157)$$

Искомая резонансная частота при резонансе смещения в соответствии с (8.48) определяется выражением:

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (8.158)$$

При резонансной частоте искомая амплитуда вынужденных колебаний (см. (8.49)) равна:

$$A_{\text{рез}} = A(p_{\text{рез}}) = \frac{F_0}{2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (8.159)$$

Получена полная система уравнений (8.154) – (8.159) относительно неизвестных в задаче величин – добротности Q , резонансной частоты $p_{\text{рез}}$ и амплитуды смещения при резонансе $A_{\text{рез}}$.

III. Совместное решение уравнений (8.154) – (8.157) дает выражение для добротности колебательной системы:

$$Q = \sqrt{\frac{\omega_0^2 p^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi (p^2 - \omega_0^2)^2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{kmp^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2} - \frac{1}{4}}. \quad (8.160)$$

Искомую резонансную частоту $p_{\text{рез}}$ находим, решая систему уравнений (8.156) – (8.158):

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (p^2 - \omega_0^2)^2}{2p^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{2m^2 p^2}}. \quad (8.161)$$

Амплитуду смещения при резонансе $A_{\text{рез}}$ определяем, решая систему уравнений (8.156), (8.157) и (8.159):

$$\begin{aligned} A_{\text{рез}} = A(p_{\text{рез}}) &= \frac{F_0 p}{m(p^2 - \omega_0^2) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (p^2 - \omega_0^2)^2}{4p^2}}} = \\ &= \frac{F_0 p}{(mp^2 - k) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{4m^2 p^2}}}. \end{aligned} \quad (8.162)$$

Подставляя численные значения заданных в условии задачи величин в полученные формулы (8.160) – (8.162), получаем:

$$Q \approx 2,17; \quad p_{\text{рез}} \approx 19,0 \text{ рад/с}; \quad A_{\text{рез}} \approx 5,7 \text{ см}.$$

Задача 8.9

(Вынужденные колебания, резонанс)

Горизонтальный пружинный маятник совершает вынужденные колебания под действием гармонической силы $F(t) = F_0 \cos(pt)$. Коэффициент затухания маятника равен δ , а частота его собственных незатухающих колебаний – ω_0 . Найти отношение средней за период мощности вынуждающей силы $F(t)$ при частоте, соответствующей резонансу смещения, к максимальной средней мощности этой силы.

Решение

I. Рассмотрим колебания маятника под действием гармонической вынуждающей силы $F(t) = F_0 \cos(pt)$ в установившемся режиме, когда собственными затухающими колебаниями можно пренебречь (см. п. 8.1.3).

II. В установившемся режиме координата и скорость маятника меняются по законам (см. (8.47) и (8.53)):

$$x(t) = a \cos(p t + \varphi), \quad (8.163)$$

$$v(t) = -ap \sin(p t + \varphi). \quad (8.164)$$

Запишем элементарную работу dA вынуждающей силы F , совершаемую за физически бесконечно малый интервал времени:

$$dA = F(t)dx = F(t)v(t)dt, \quad (8.165)$$

где в соответствии с условием задачи вынуждающая сила равна:

$$F(t) = F_0 \cos(pt). \quad (8.166)$$

Суммарную работу этой силы за период колебаний T найдем интегрированием элементарной работы:

$$A = \int_0^T F(t)v(t)dt. \quad (8.167)$$

Запишем среднюю за период мощность вынуждающей силы:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)v(t)dt. \quad (8.168)$$

Система уравнений (8.163) – (8.168) позволяет получить зависимость средней мощности $P_{\text{ср}}$ вынуждающей силы от частоты p . Для нахождения искомого в задаче отношения средней за период мощности силы F при частоте, соответствующей резонансу смещения, к максимальной средней мощности этой силы необходимо найти максимум средней мощности, а также дополнить полученную систему уравнений выражениями (8.45), (8.46) и (8.48) для амплитуды вынужденных колебаний $a(p)$, фазы $\varphi(p)$ и резонансной частоты $p_{\text{рез}}$ при резонансе смещения:

$$a(p) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad (8.169)$$

$$\text{tg } \varphi(p) = \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}. \quad (8.170)$$

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (8.171)$$

III. Интегрируя (8.168) с учетом (8.167) и заданного в задаче закона изменения вынуждающей силы $F(t)$, получаем:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} F_0 a(p) p \sin(\varphi(p)). \quad (8.172)$$

Найдем $\sin(\varphi(p))$, входящий в формулу (8.172), воспользовавшись (8.170):

$$\sin \varphi(p) = \frac{\operatorname{tg} \varphi(p)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi(p)}} = \frac{2\delta p}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (8.173)$$

Подставляя (8.173) и (8.169) в (8.172), получаем зависимость средней мощности вынуждающей силы от частоты:

$$P_{\text{ср}}(p) = \frac{F_0^2 \delta p^2}{m \left((\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2 \right)}. \quad (8.174)$$

Частоту вынуждающей силы p_{max} , при которой ее средняя мощность достигает максимума, находим из условия $\frac{dP_{\text{ср}}(p)}{dp} = 0$:

$$p_{\text{max}} = \omega_0. \quad (8.175)$$

Заметим, что частота p_{max} совпадает с частотой, соответствующей резонансу скорости (см. п. 8.1.3).

Подстановка (8.175) в (8.174) дает выражение для максимальной средней мощности вынуждающей силы:

$$P_{\text{ср}}^{\text{max}} \equiv P_{\text{ср}}(p_{\text{max}}) = \frac{F_0^2}{4m\delta}. \quad (8.176)$$

Выражение для средней мощности вынуждающей силы при частоте, соответствующей резонансу смещения, находим подставляя (8.171) в (8.174):

$$P_{\text{ср}}^{\text{рез}} \equiv P_{\text{ср}}(p_{\text{рез}}) = \frac{F_0^2 (\omega_0^2 - 2\delta^2)}{4m\delta (\omega_0^2 - \delta^2)}. \quad (8.177)$$

Искомое отношение средней за период мощности вынуждающей силы $F(t)$ при частоте, соответствующей резонансу смещения, к максимальной средней мощности этой силы находим, воспользовавшись (8.176) и (8.177):

$$\frac{P_{\text{ср}}^{\text{рез}}}{P_{\text{ср}}^{\text{max}}} = \frac{\omega_0^2 - 2\delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (8.178)$$

Заметим, что полученное соотношение мощностей справедливо при $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. При значениях коэффициента затухания $\delta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ в колебательной системе резонанс смещения не наблюдается (а резонанс скорости существует).

Задача 8.10

(Свободные незатухающие колебания системы с двумя степенями свободы)

Два маленьких шарика массой m подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью k (см. рис. 8.31). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ при малых колебаниях в трех случаях:

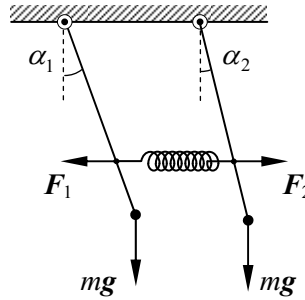


Рис. 8.31

1) оба маятника отклонили в одну сторону на одинаковый угол α_0 от положения равновесия в момент времени $t = 0$ и отпустили с нулевой начальной скоростью;

2) маятники отклонили в разные стороны на одинаковые углы α_0 от положения равновесия в момент времени $t = 0$ и отпустили с нулевой начальной скоростью;

3) в начальный момент времени $t = 0$ одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость v_0 , направленную от положения равновесия.

Решение

I. На каждый маятник действуют в процессе движения три силы: сила тяжести mg , сила упругости со стороны пружины F_i ($i = 1, 2$) и сила реакции потолка, не изображенная на рис. 8.31. Силами трения о воздух и в подвесе пренебрегаем. В соответствии с

начальными условиями, сформулированными в задаче, маятники колеблются в плоскости, совпадающей с плоскостью чертежа (рис. 8.31). Задачу решаем динамическим методом в инерциальной лабораторной системе отсчета, жестко связанной с потолком.

II. Запишем уравнение моментов (см. (6.48) в п. 6.1.2. Главы 6) для каждого из маятников относительно неподвижных осей, проходящих через точку их крепления к потолку перпендикулярно плоскости колебаний (см. рис. 8.31):

$$ml^2 \ddot{\alpha}_1 = -mgl \sin \alpha_1 - F_1 a \cos \alpha_1, \quad (8.179)$$

$$ml^2 \ddot{\alpha}_2 = -mgl \sin \alpha_2 + F_2 a \cos \alpha_2. \quad (8.180)$$

При малых углах отклонения маятников от вертикали пренебрегли отклонением пружины в процессе колебаний от ее горизонтальной ориентации в положении равновесия. При записи уравнений (8.179) и (8.180) учтено также, что моменты сил реакции потолка относительно выбранных осей равны нулю.

Сила упругости, действующая со стороны пружины на первый маятник, в соответствии с законом Гука (см. (2.5) в п. 2.1.2 Главы 2), равна:

$$F_1 = ka(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2). \quad (8.181)$$

Поскольку пружина невесома, то согласно второму закону Ньютона силы, действующие со стороны стержней на пружину, равны, а, следовательно, равны и силы, действующие на стержни со стороны пружины (в соответствии с третьим законом Ньютона):

$$F_1 = F_2. \quad (8.182)$$

Подставляя (8.181), (8.182) в (8.179), (8.180) и учитывая малость углов α_i отклонения стержней от вертикали ($\sin \alpha_i \cong \alpha_i$, $\cos \alpha_i \cong 1$), получаем систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{l} \alpha_1 + \frac{ka^2}{ml^2} (\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \quad (8.183)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{l} \alpha_2 + \frac{ka^2}{ml^2} (\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad (8.184)$$

Делая замену переменных

$$\xi_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (8.185)$$

$$\xi_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad (8.186)$$

получаем два независимых уравнения гармонических колебаний (8.1) для новых переменных ξ_1 и ξ_2 :

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{g}{l} \xi_1 = 0, \quad (8.187)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{2ka^2}{ml^2} \right) \xi_2 = 0. \quad (8.188)$$

Следовательно, при колебаниях маятников переменные ξ_1 и ξ_2 изменяются по гармоническим законам:

$$\xi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (8.189)$$

$$\xi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (8.190)$$

где частоты колебаний ω_1 и ω_2 в соответствии с (8.187) и (8.188) определяются параметрами маятников и пружины:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (8.191)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}. \quad (8.192)$$

Амплитуды A_1 , A_2 и начальные фазы φ_1 , φ_2 колебаний переменных ξ_1 и ξ_2 определяются начальными условиями.

Переходя к углам отклонения стержней от вертикали из (8.185), (8.186), (8.189) и (8.190) получаем искомые законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$:

$$\alpha_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (8.193)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (8.194)$$

Определим параметры A_1 , A_2 и φ_1 , φ_2 колебаний в трех различных случаях задания начальных условий. Для этого сначала найдем угловые скорости движения маятников, дифференцируя (8.193) и (8.194) по времени:

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\frac{A_1 \omega_1}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2 \omega_2}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (8.195)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -\frac{A_1\omega_1}{2}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2\omega_2}{2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (8.196)$$

1. В случае, когда оба маятника отклонили в одну сторону на одинаковый угол α_0 от положения равновесия в момент времени $t = 0$ и отпустили с нулевой начальной скоростью, начальные условия записываются в виде:

$$\alpha_1(t=0) = \alpha_0, \quad \alpha_2(t=0) = \alpha_0, \quad (8.197)$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = 0, \quad \dot{\alpha}_2(t=0) = 0. \quad (8.198)$$

Воспользовавшись формулами (8.193) – (8.196) для параметров A_1 , A_2 и φ_1 , φ_2 получаем:

$$A_1 = 2\alpha_0, \quad A_2 = 0, \quad (8.199)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \quad (8.200)$$

При этом искомые законы движения маятников принимают вид:

$$\alpha_1(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad (8.201)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (8.202)$$

Как видим, в первом случае задания начальных условий маятники колеблются по гармоническому закону с одинаковой частотой $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, амплитудой α_0 и нулевой начальной фазой.

2. Во втором случае, когда маятники отклонили в разные стороны на одинаковые углы α_0 от положения равновесия в момент времени $t = 0$ и отпустили с нулевой начальной скоростью, начальные условия имеют вид:

$$\alpha_1(t=0) = \alpha_0, \quad \alpha_2(t=0) = -\alpha_0, \quad (8.203)$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = 0, \quad \dot{\alpha}_2(t=0) = 0. \quad (8.204)$$

Как и в первом случае начальных условий, воспользовавшись формулами (8.193) – (8.196) для параметров A_1 , A_2 и φ_1 , φ_2 получаем:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 2\alpha_0. \quad (8.205)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \quad (8.206)$$

При этом искомые законы движения маятников имеют вид:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t, \quad (8.207)$$

$$\alpha_2 = -\alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t. \quad (8.208)$$

Как видим, во втором случае задания начальных условий маятники колеблются по гармоническому закону в противофазе с одинаковой частотой $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$ и амплитудой α_0 .

3. В случае, когда в начальный момент времени $t = 0$ одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость v_0 , направленную от положения равновесия, начальные условия записываются в виде:

$$\alpha_1(t=0) = 0, \quad \alpha_2(t=0) = 0, \quad (8.209)$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = \frac{v_0}{l}, \quad \dot{\alpha}_2(t=0) = 0. \quad (8.210)$$

Как и в предыдущих случаях начальных условий, воспользовавшись формулами (8.193) – (8.196) для параметров A_1 , A_2 и φ_1 , φ_2 получаем:

$$A_1 = \frac{v_0}{\sqrt{gl}}, \quad A_2 = -\frac{v_0}{\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}}. \quad (8.211)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (8.212)$$

При этом искомые законы движения маятников принимают вид:

$$\alpha_1 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t, \quad (8.213)$$

$$\alpha_2 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t - \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t. \quad (8.214)$$

Как видим, в третьем случае задания начальных условий движение маятников представляют собой суперпозицию двух гармонических колебаний с частотами $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$.

Для анализа полученного решения законы движения маятников удобно записать в виде:

$$\alpha_1 = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t, \quad (8.215)$$

$$\alpha_2 = C_1 \sin \omega_1 t - C_2 \sin \omega_2 t, \quad (8.216)$$

где

$$C_1 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}}, \quad C_2 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}}. \quad (8.217)$$

При слабой связи между маятниками $ka^2 \ll \frac{mgl}{2}$ частоты ω_1 и ω_2 оказываются близкими по величине (см. (8.191) и (8.192))

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1, \quad (8.218)$$

а законы движения маятников (8.216) и (8.217) имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= C_1(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) + (C_2 - C_1) \sin \omega_2 t \cong \\ &\cong 2C_1 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = \\ &= 2C_1 \cos\left(\frac{\omega_{\text{биен}}}{2} t\right) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (8.219)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) &= C_1(\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t) - (C_2 - C_1) \sin \omega_2 t \cong \\ &\cong 2C_1 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = \\ &= 2C_1 \sin\left(\frac{\omega_{\text{биен}}}{2} t\right) \cos \omega t, \end{aligned} \quad (8.220)$$

где введены обозначения

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega_{\text{биен}} = \omega_2 - \omega_1. \quad (8.221)$$

Как видим, при слабой связи между маятниками движение маятников носит характер биений и его можно представить как ко-

лебания с частотой ω и медленно меняющейся амплитудой с периодом $T_{\text{биен}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{биен}}}$ и частотой $\nu_{\text{биен}} = \frac{\omega_{\text{биен}}}{2\pi}$.

Биения – это периодическое изменение амплитуды колебаний, возникающее при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

На рис. 8.32 в качестве примера таких колебаний изображены временные зависимости углов отклонения маятников при $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1,1$.

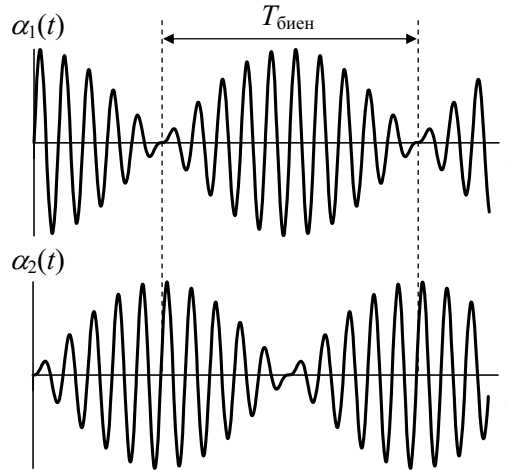


Рис. 8.32

Для сравнения на рис. 8.33 представлены временные зависимости углов отклонения маятников при сильно различающихся частотах $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 9$, что соответствует наличию сильной связи между маятниками.

Заметим, что при специальном выборе начальных условий все элементы системы колеблются по гармоническому закону с одной и той же частотой, при этом фаза и амплитуда колебаний различных элементов системы могут различаться (первые два случая задания начальных условий в данной задаче). Такие колебания и их

частоты называются нормальными (см. п. 9.1. Теоретический материал в Главе 9).

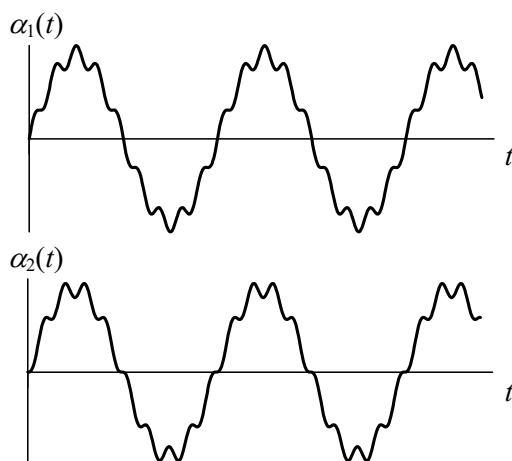


Рис. 8.33

В общем случае при определенных начальных условиях возбуждаются все нормальные колебания (третий случай задания начальных условий в данной задаче).

Задача 8.11

(Свободные незатухающие колебания системы с двумя степенями свободы)

Два шарика одинаковой массой m , соединенные нерастянутой пружинкой длиной l_0 и жесткостью k , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать постоянная сила F , направленная вдоль оси пружинки. Определить законы движения шариков, а также закон изменения длины пружинки $l(t)$.

Решение

I. Приложим силу F к переднему по направлению действия силы шарiku (см. рис. 8.34). Задачу решаем в лабораторной инерциальной системе отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью. Направим ось X декартовой системы координат вдоль направления действия силы и совместим начало отсчета с центром

масс системы тел «два шарика + пружинка» в начальный момент времени (рис. 8.34).

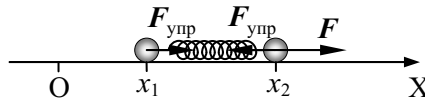


Рис. 8.34

На шарики в процессе движения действуют силы упругости со стороны пружинки, удовлетворяющие закону Гука (см. п. 2.1. Теоретический материал в Главе 2). Будем считать пружинку невесомой и, следовательно (в соответствии со вторым и третьим законами Ньютона) силы упругости, приложенные к разным шарикам, равными по модулю. Уравнения движения шариков в проекции на ось X выбранной системы координат имеют вид:

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (8.222)$$

$$m\ddot{x}_2 = F - k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (8.223)$$

где x_2 и x_1 – координаты переднего и заднего (по направлению действия силы) шариков.

Полученная система уравнений (8.222) – (8.223) является системой двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, которую легко свести к двум независимым уравнениям для длины пружинки l и координаты центра масс системы $x_{\text{цм}}$:

$$l(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad (8.224)$$

$$x_{\text{цм}}(t) = \frac{x_2(t) + x_1(t)}{2}. \quad (8.225)$$

Вычитая из (8.222) уравнение (8.223), получаем уравнение для длины пружинки

$$m\ddot{l} = F - 2k(l - l_0). \quad (8.226)$$

Сделаем замену переменной $l(t)$ на $z(t)$:

$$l(t) = z(t) + l_0 + \frac{F}{2k}. \quad (8.227)$$

При этом уравнение (8.226) сводится к уравнению гармонических колебаний (8.1):

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = 0. \quad (8.228)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$z = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.229)$$

где угловая частота ω_0 гармонических колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad (8.230)$$

а амплитуда A и начальная фаза φ_0 определяются начальными условиями, заданными в задаче:

$$x_1(t=0) = -\frac{l_0}{2}, \quad x_2(t=0) = \frac{l_0}{2}, \quad (8.231)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0. \quad (8.232)$$

В результате решения системы уравнений (8.224), (8.227), (8.231) и (8.232) получаем закон изменения длины пружинки:

$$l(t) = \frac{F}{2k}(1 - \cos \omega_0 t) + l_0. \quad (8.233)$$

На рис. 8.35 изображена зависимость длины пружинки от времени $l(t)$. Как видим, пружинка в процессе движения шариков находится в растянутом состоянии, периодически меняя свою длину по гармоническому закону от l_0 (длины нерастянутой пружинки) до значения $l_0 + \frac{F}{k}$.

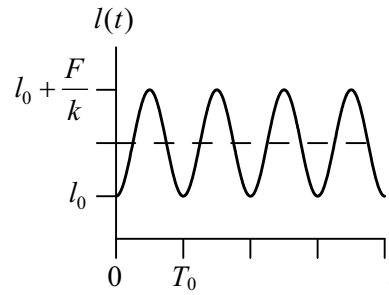


Рис. 8.35

Сложение уравнений (8.222) и (8.223) с учетом выражения для координаты центра масс (8.225) дает уравнение для ускорения центра масс:

$$\ddot{x}_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}. \quad (8.234)$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий (8.231), (8.232) имеет вид:

$$x_{\text{цм}}(t) = \frac{Ft^2}{4m}. \quad (8.235)$$

Переходя от переменных $l(t)$ и $x_{\text{цм}}(t)$ к координатам шариков с помощью (8.224) и (8.225) из (8.233) и (8.235) получаем законы движения шариков:

$$x_1(t) = x_{\text{цм}}(t) - \frac{l(t)}{2} = \frac{F}{4m} \left(t^2 - 1 + \cos(\omega_0 t) \right) - \frac{l_0}{2}, \quad (8.236)$$

$$x_2(t) = x_{\text{цм}}(t) + \frac{l(t)}{2} = \frac{F}{4m} \left(t^2 + 1 - \cos(\omega_0 t) \right) + \frac{l_0}{2}. \quad (8.237)$$

На рис. 8.36 изображены зависимости координат шариков от времени. Как видим, движение шариков является суперпозицией равноускоренного движения с ускорением центра масс системы $\ddot{x}_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}$ и колебательного движения с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, при этом колебания шариков происходят в противофазе.

Заметим, что, если приложить силу F к заднему по отношению к ее направлению шарiku, то пружинка в процессе движения шариков находится в сжатом состоянии, периодически меняя свою длину по гармоническому закону от l_0 до значения $l_0 - \frac{F}{k}$.

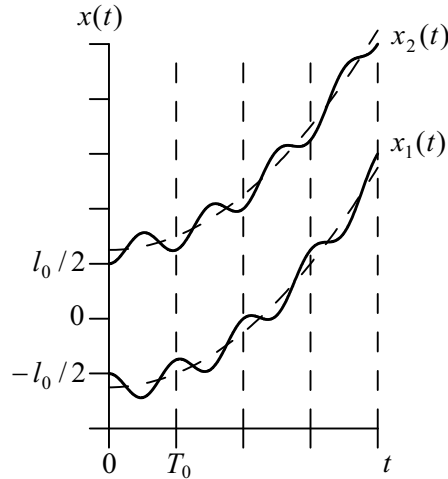


Рис. 8.36

8.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

В бочке с жидкостью плотностью ρ в вертикальном положении плавает пробирка массой M . В пробирку падает кусочек пластилина массой δ . Пролетев по вертикали расстояние h , он прилипает к дну пробирки. Пренебрегая трением, найти амплитуду

колебаний пробирки, если площадь ее поперечного сечения равна S .

Ответ: $A = \sqrt{\frac{m}{\rho S} \left(\frac{m}{\rho S} + \frac{2mh}{M+m} \right)}$.

Задача 2

На тележке массой M закреплен горизонтальный стержень, по которому может без трения скользить муфта массой m . Две пружины, надетые на стержень, одним концом прикреплены к муфте, а другим – к тележке. Общий коэффициент жесткости пружин равен k . В состоянии равновесия центры масс муфты и тележки находятся на одной вертикали. Муфту смещают от положения равновесия на небольшое расстояние l и отпускают с нулевой начальной скоростью. Определить частоту ω и амплитуды колебаний муфты A_m и тележки A_t . Трением пренебречь.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$, $A_m = l \frac{M}{m+M}$, $A_t = l \frac{m}{m+M}$.

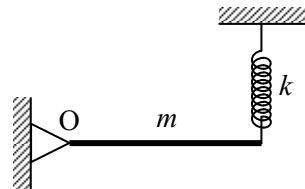
Задача 3

В сплошном цилиндре радиусом R сделана цилиндрическая полость радиусом $R/2$ с осью, проходящей через середину радиуса цилиндра параллельно его оси. Определить период малых колебаний, которые возникнут, если положить цилиндр на шероховатую горизонтальную поверхность и вывести его из состояния равновесия.

Ответ: $T = \pi \sqrt{\frac{29R}{g}}$.

Задача 4

Однородный стержень массой m совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O . Правый конец стержня подвешен на невесомой пружине жесткостью k (см. рис.). Найти период колебаний стержня, если в положении равновесия он горизонтален.

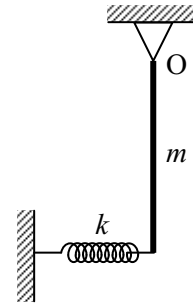


Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.

Задача 5

Найти частоту малых колебаний тонкого однородного стержня массой m и длиной l вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O (см. рис.). Жесткость пружины равна k , ее масса пренебрежимо мала. В положении равновесия стержень вертикален.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}}$.



Задача 6

В сплошном шаре радиусом R сделана шарообразная полость радиусом $R/2$ с центром, расположенным в середине радиуса шара. Определить период малых колебаний, которые возникнут, если положить шар на шероховатую горизонтальную поверхность и вывести его из состояния равновесия.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{177R}{10g}}$.

Задача 7

Найти добротность Q математического маятника длиной $l = 50$ см, если за промежуток времени $\tau = 5,2$ мин его механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ раз.

Ответ: $Q \cong \frac{\tau}{\ln \eta} \sqrt{\frac{g}{l}} \cong 1,3 \cdot 10^2$.

Задача 8

Под действием момента внешних сил $M_z = M_0 \cos \omega t$ тело, подвешенное на упругой нити, совершает установившиеся вынужденные крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t - \alpha)$. Найти работу сил трения, действующих на тело, за период колебания.

Ответ: $A_{\text{тр}} = -\pi \varphi_0 M_0 \sin \alpha$.

Задача 9

При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости осциллятора равна половине своего максимального значения при резонансе. Найти частоту, соответствующую резонансу скорости.

Ответ: $\omega_p = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

Задача 10

В условиях предыдущей задачи определить коэффициент затухания и частоту затухающих колебаний.

Ответ: $\delta = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\sqrt{3}}$, $\omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2 - (\omega_1 - \omega_2)^2 / 12}$.

ГЛАВА 9 БЕГУЩИЕ И СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ. МОДЫ И НОРМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ

9.1. Теоретический материал

Возмущение – пространственно локальное, неравновесное для всей среды изменение ее состояния – изменение физической величины (скалярной – $\xi(t, \mathbf{r})$ или векторной – $\xi(t, \mathbf{r})$), описывающей это состояние.

Волна – процесс распространения возмущения в пространстве.

Векторное волновое поле $\xi(t, \mathbf{r})$ – векторная функция времени t и радиус-вектора точки наблюдения $\mathbf{r}$, описывающая возмущение среды, в которой распространяется волна.

Скалярное волновое поле $\xi(t, \mathbf{r})$ – скалярная функция времени t и радиус-вектора точки наблюдения $\mathbf{r}$, описывающая возмущение среды, в которой распространяется волна.

Скорость волны – скорость распространения возмущения в пространстве.

Продольные и поперечные волны – волны, в которых векторное волновое поле $\xi(t, \mathbf{r})$ направлено соответственно вдоль или перпендикулярно направлению распространения волны.

Упругая (акустическая) волна – волна упругих деформаций (напряжений, давлений, смещений частиц, а также их скоростей и ускорений) в среде. Скорость упругой волны, как правило, значительно больше скорости движения частиц в среде.

9.1.1. Волновое уравнение

Векторное волновое уравнение для линейной, изотропной и однородной среды:

$$\frac{\partial^2 \xi(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi(t, \mathbf{r}), \quad (9.1)$$

где $\xi(t, \mathbf{r})$ – векторное волновое поле, c – скорость волны,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа.

Скалярное волновое уравнение для линейной, изотропной и однородной среды:

$$\frac{\partial^2 \xi(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi(t, \mathbf{r}), \quad (9.2)$$

где $\xi(t, \mathbf{r})$ – скалярное волновое поле (в том числе и проекция векторного волнового поля на ось декартовой системы координат).

Закон распространения (уравнение) волны – решение волнового уравнения (9.1) или (9.2).

Принцип суперпозиции волновых полей – волновое (векторное или скалярное) поле для совокупности волн равно сумме волновых полей для каждой волны в отдельности:

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \sum_i \xi_i(t, \mathbf{r}), \quad \xi(t, \mathbf{r}) = \sum_i \xi_i(t, \mathbf{r}). \quad (9.3)$$

С математической точки зрения, если поля $\xi_i(t, \mathbf{r})$ (или $\xi_i(t, \mathbf{r})$) являются решениями линейного и однородного волнового уравнения (9.1) (или (9.2)), описывающего волновой процесс, то его решением является и их любая линейная комбинация.

Из принципа суперпозиции следует, что различные волны распространяются независимо друг от друга в линейной, изотропной и однородной среде. Другими словами – всякое возмущение, существующее в линейной, изотропной и однородной среде, не влияет на распространение другого возмущения.

Волновой фронт – поверхность, образованная точками пространства с одинаковым возмущением (значением векторного $\xi(t, \mathbf{r})$ или скалярного $\xi(t, \mathbf{r})$ волнового поля).

9.1.2. Плоские волны

Пусть скалярное волновое поле $\xi(t, \mathbf{r})$ зависит лишь от одной из декартовых координат, например, координаты x вдоль оси X – $\xi(t, x)$. При этом волновым фронтом является плоскость, – в среде распространяется **плоская волна**.

Волновое уравнение плоской волны:

$$\frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \ddot{\xi}(t, x) = c^2 \xi''(t, x), \quad (9.4)$$

где c – скорость волны.

Общим решением волнового уравнения (9.4) плоской волны является сумма двух произвольных (дважды дифференцируемых) функций:

$$\xi(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (9.5)$$

Функция $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X , а функция $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$ – волну, распространяющуюся в отрицательном направлении этой оси.

Пусть единичный вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль направления распространения волны (см. рис. 9.1).

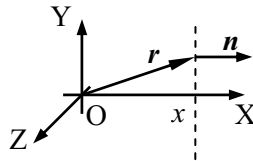


Рис. 9.1. Взаимная ориентация векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$ в случае плоской волны

Тогда для произвольной точки пространства, характеризующей радиус-вектором $\mathbf{r}$, для обеих волн с учетом направления их распространения можно записать $\pm x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ и

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right). \quad (9.6)$$

Распространение волны происходит в направлении нормали к волновому фронту и может рассматриваться как движение волнового фронта.

Плоская гармоническая волна

Пусть скалярное волновое поле $\xi(t, x)$ во всех точках плоскости YZ с координатой $x = 0$ меняется по одному гармоническому закону (синфазно):

$$\xi(t, 0) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (9.7)$$

где ξ_0 – амплитуда колебаний волнового поля в точках плоскости YZ с координатой $x = 0$, ω – угловая частота, связанная с частотой колебаний ν и периодом $T = \frac{1}{\nu}$ соотношениями $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$; φ_0 – начальная фаза колебаний (в точке $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$).

В соответствии с общим решением волнового уравнения (9.5) в области $x \geq 0$ будет распространяться плоская гармоническая волна.

Закон распространения плоской гармонической волны:

$$\begin{aligned}\xi(t, x) &= \xi_0 \cos(\omega(t - x/c) + \varphi_0) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= \xi_0 \cos(\omega t + \varphi(x)) = \xi_0 \cos(\Phi(t, x)).\end{aligned}\quad (9.8)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – **волновое число**, λ – **длина волны**, kx – **набег фазы** (или **фазовый сдвиг**) при прохождении волной расстояния x , $\Phi(t, x) = \omega t - kx + \varphi_0$ – (**полная**) **фаза**.

Для произвольной точки пространства, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$, можно записать:

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0) = \xi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0), \quad (9.9)$$

где $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}\mathbf{n}$ – **волновой вектор**, равный по модулю волновому числу k и направленный вдоль направления распространения волны (волнового фронта).

Фазовый фронт (волновой фронт для гармонической волны) – поверхность, во всех точках которой волновое возмущение $\xi(t, \mathbf{r})$ имеет в данный момент времени одинаковую фазу Φ .

В случае **экспоненциального затухания** плоской гармонической волны закон ее распространения запишется в виде:

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi_0 e^{-\delta r} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0), \quad (9.10)$$

где δ – коэффициент затухания.

9.1.3. Сферические волны

Пусть скалярное волновое поле $\xi(t, \mathbf{r})$ зависит лишь от одной пространственной переменной – расстояния от точки наблюдения до определенной точки пространства S. При этом волновым фрон-

том является сфера с центром в точке S , – в среде распространяется **сферическая волна**.

Закон распространения сферической волны (общее решение скалярного волнового уравнения (9.2) при соответствующих граничных условиях):

$$\xi(t, r) = \frac{\xi_1(t - r/c)}{r} + \frac{\xi_2(t + r/c)}{r}, \quad (9.11)$$

где $\xi_1(t - r/c)$ и $\xi_2(t + r/c)$ – произвольные дважды дифференцируемые скалярные функции, $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – модуль радиус-вектора произвольной точки пространства $\mathbf{r}$ относительно точки S , находящейся в начале выбранной системы координат (см. рис. 9.2).

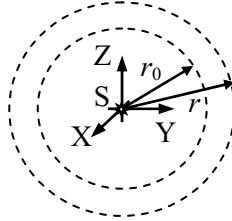


Рис. 9.2. Положение волновых фронтов с радиусами r_0 и r в случае сферической волны

Данное решение волнового уравнения описывает суперпозицию двух волн. Первое из слагаемых $\frac{\xi_1(t - r/c)}{r}$ – расходящуюся от начала координат сферическую волну, а второе $\frac{\xi_2(t + r/c)}{r}$ – сферическую волну, сходящуюся к началу координат.

Пусть на сфере радиуса r_0 задано граничное условие в виде гармонического возмущения, синфазного во всех точках сферы:

$$\xi(t, r_0) = \xi_0(r_0) \cos(\omega(t - r_0/c) + \varphi_0). \quad (9.12)$$

Тогда в области пространства вне сферы радиуса r_0 будет распространяться расходящаяся сферическая гармоническая волна.

Закон распространения расходящейся сферической гармонической волны:

$$\xi(t, r) = \xi_0(r) \cos(\omega(t - r/c) + \varphi_0) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (9.13)$$

где A – величина, численно равная амплитуде волнового возмущения на единичном расстоянии от точки S .

В случае **экспоненциального затухания** (с коэффициентом затухания δ) сферической гармонической волны закон ее распространения запишется в виде:

$$\xi(t, r) = \xi_0(r) \cos(\omega t - kr + \varphi_0) = \frac{A}{r} e^{-\delta r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0). \quad (9.14)$$

9.1.4. Скорости распространения упругих волн в различных средах

А. Продольная упругая волна в твердом теле

Скорость волны:

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (9.15)$$

где ρ – **объемная плотность** тела, $E \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon}$ – **модуль Юнга** или модуль одностороннего растяжения (сжатия), σ – **продольное напряжение**, ε – **относительная деформация**.

Закон Гука для одностороннего растяжения (сжатия):

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (9.16)$$

Рассмотрим физически бесконечно малый слой dx твердого тела с координатой x вдоль направления распространения волны (см. рис. 9.3).

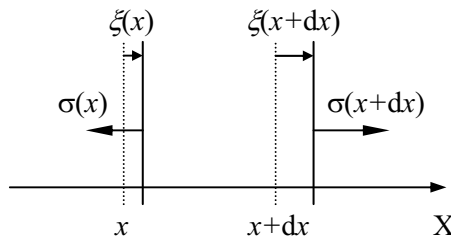


Рис. 9.3. Смещение границ $\xi(x)$ рассматриваемого слоя твердого тела при распространении продольной упругой волны

Тогда **относительная деформация** ε равна

$$\varepsilon = \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi'_x, \quad (9.17)$$

и закон Гука принимает вид

$$\sigma(x) = E \xi'_x. \quad (9.18)$$

Если S – площадь поперечного сечения рассматриваемого фрагмента тела, а ρ – его плотность в отсутствие волны, то уравнение движения рассматриваемого слоя тела массой $dm = \rho S dx$ имеет вид:

$$\rho S dx \ddot{\xi} = S(\sigma(x+dx) - \sigma(x)). \quad (9.19)$$

Преобразуем (9.19) с учетом закона Гука (9.18) и малости толщины рассматриваемого слоя:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\xi} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \sigma'_x, \\ \ddot{\xi} &= \frac{E}{\rho} \xi''_x. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (9.4), получим приведенное выше выражение (9.15) для скорости продольной упругой волны в твердом теле.

Б. Поперечная упругая волна в твердом теле

Скорость волны:

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (9.21)$$

где $G \equiv \frac{\tau}{\gamma}$ – **модуль сдвига**, τ – **поперечное (касательное) на-**

пряжение, $\gamma = \operatorname{tg} \alpha \cong \alpha$ – **тангенс угла сдвига** α . Отметим, что в однородном изотропном твердом теле $E > G$ и скорость продольной звуковой волны больше скорости поперечной волны $c_{\parallel} > c_{\perp}$.

Закон Гука для сдвига:

$$\tau = G \gamma. \quad (9.22)$$

Рассмотрим колеблющийся при распространении волнового возмущения достаточно малый фрагмент тела, заключенный между координатами x и $x + dx$ вдоль направления распространения волны (см. рис. 9.4).

Касательные напряжения у обоих концов рассматриваемого фрагмента в соответствии с законом Гука (9.22) и рис. 9.4 равны:

$$\tau(x) = G\gamma(x) = G \operatorname{tg}(\alpha(x)) = G \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_x, \quad (9.23)$$

$$\tau(x+dx) = G\gamma(x+dx) = G \operatorname{tg}(\alpha(x+dx)) = G \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+dx}. \quad (9.24)$$

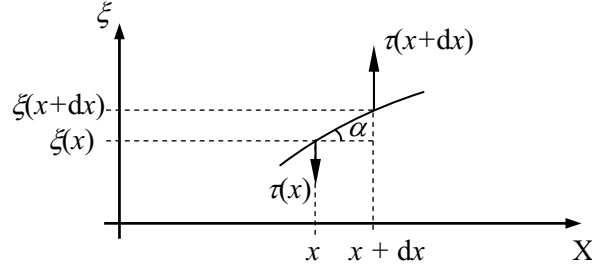


Рис. 9.4. Зависимость смещения частиц твердого тела $\xi(x)$ при распространении поперечной упругой волны вдоль оси X

Уравнение движения рассматриваемого фрагмента твердого тела массой $dm = \rho S dx$ имеет вид:

$$\rho S dx \ddot{\xi} = (\tau(x+dx) - \tau(x))S. \quad (9.25)$$

Преобразуем (9.25) с учетом выражений для касательных напряжений (9.23) и (9.24):

$$\ddot{\xi} = \frac{G}{\rho} \xi_x''. \quad (9.26)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (9.4), получим приведенное выше выражение (9.21) для скорости поперечной упругой волны в твердом теле.

В. Поперечная упругая волна в струне

Скорость волны:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{л}}}}, \quad (9.27)$$

где T – сила натяжения струны, $\rho_{\text{л}}$ – линейная плотность струны в отсутствие волны.

Запишем уравнение движения физически бесконечно малого линейного элемента струны длиной dx и массой $dm = \rho_\xi dx$ (см. рис. 9.5) при распространении поперечной упругой волны вдоль струны:

$$\rho_\xi dx \ddot{\xi} = T(x+dx) \frac{\partial \xi(x+dx)}{\partial x} - T(x) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x}. \quad (9.28)$$

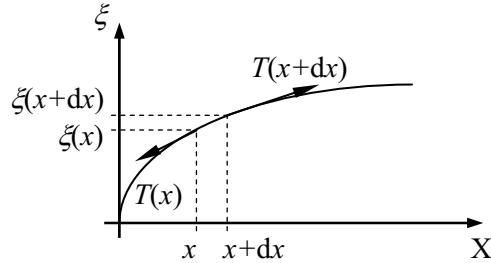


Рис. 9.5. Зависимость смещения частиц струны $\xi(x)$ при распространении поперечной упругой волны вдоль струны

Преобразуем (9.28) с учетом малости выбранного элемента струны при постоянной величине силы натяжения вдоль струны $T(x) = \text{const}$:

$$dx \rho_\xi \ddot{\xi} = T \left(\frac{\partial \xi(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \right) - T \frac{\partial \xi(x)}{\partial x},$$

$$\ddot{\xi} = \frac{T}{\rho_\xi} \xi_x''. \quad (9.29)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (9.4), получим приведенное выше выражение (9.27) для скорости поперечной упругой волны в струне.

Г. Упругая волна в идеальных жидкости и газе

Скорость упругой волны в идеальных жидкости и газе:

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}}, \quad (9.30)$$

где P – давление и ρ – плотность жидкости или газа, ρ_0 – плотность в отсутствие волны.

Скорость упругой волны в идеальном газе в случае адиабатического (без теплопередачи) процесса ее распространения:

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}, \quad (9.31)$$

где $\gamma \equiv c_P / c_V$, c_P и c_V – теплоемкости при постоянных давлении и объеме газа соответственно, P_0 – давление в отсутствие волны.

Рассмотрим слой dx идеальной (без вязкого трения) жидкости или газа с координатой x вдоль направления распространения плоской волны (см. рис. 9.6).

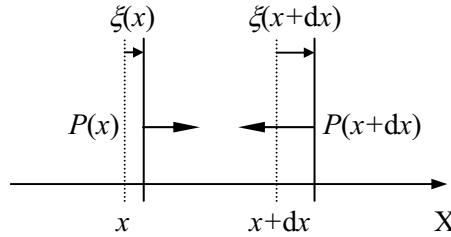


Рис. 9.6. Смещение границ $\xi(x)$ рассматриваемого слоя идеальной жидкости или газа при распространении упругой волны

Уравнение движения выбранного слоя жидкости или газа имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho S dx \ddot{\xi} &= S(P(x) - P(x+dx)) = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx, \\ \rho \ddot{\xi} &= -\frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Воспользуемся материальным уравнением среды $P = P(\rho)$. При малых возмущениях плотности $\Delta \rho$ и давления ΔP , которые происходят вследствие распространения в ней упругой волны, запишем:

$$\Delta P = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \Delta \rho. \quad (9.33)$$

При этом для относительного изменения плотности $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ можно записать (см. рис. 9.6):

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\xi'_x. \quad (9.34)$$

В результате уравнение движения выбранного слоя жидкости или газа примет вид:

$$\rho \ddot{\xi} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial(\Delta P)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \cdot \rho \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \xi''_x. \quad (9.35)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (9.4), получим приведенное выше выражение (9.30) для скорости упругой волны в идеальной жидкости или газе.

Для случая адиабатического процесса распространения упругой волны в идеальном газе воспользуемся уравнением состояния рассматриваемого слоя газа объемом $dV = Sdx$ и массой $dm = \rho dV$:

$$P(dV)^\gamma = \text{const} \equiv C, \quad P = C(dV)^{-\gamma} = C \left(\frac{dm}{\rho} \right)^{-\gamma} = C(dm)^{-\gamma} \rho^\gamma.$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} = C(dm)^{-\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (9.36)$$

В результате получим приведенное выше выражение (9.31) для скорости упругой волны в идеальном газе в случае адиабатического процесса ее распространения.

9.1.5. Энергетические соотношения

При распространении плоской упругой продольной гармонической волны вдоль оси X в твердом теле смещение частиц среды из положения равновесия $\xi(t, x)$, их скорость $\dot{\xi}(t, x)$ и относительная деформация тела $\varepsilon(t, x)$ записываются в виде (см. пп. 9.1.2 и 9.1.4.А):

$$\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (9.37)$$

$$\dot{\xi}(t, x) = -\xi_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (9.38)$$

$$\varepsilon(t, x) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\xi_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (9.39)$$

При этом **объемная плотность кинетической энергии** частиц тела, участвующих в волновом движении, равна:

$$w^k(t, x) = \frac{\rho \dot{\xi}^2(t, x)}{2} = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (9.40)$$

Объемная плотность потенциальной энергии частиц тела, участвующих в волновом движении:

$$w^p(t, x) = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\xi_0^2 E k^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (9.41)$$

Поскольку скорость упругой продольной волны в твердом теле $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (см. (9.15)) и волновое число $k \equiv \frac{\omega}{c}$, то:

$$\begin{aligned} w^p(t, x) &= \frac{\xi_0^2 E k^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = w^k(t, x). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Как видим, для бегущей волны максимумы и минимумы кинетической и потенциальной энергий совпадают.

Объемная плотность энергии волны:

$$w(t, x) = w^k(t, x) + w^p(t, x) = w_0 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (9.43)$$

где амплитуда изменения объемной плотности энергии волны

$$w_0 = \xi_0^2 \rho \omega^2 = \xi_0^2 E k^2. \quad (9.44)$$

Среднее значение объемной плотности энергии гармонической волны за период колебаний:

$$\langle w(t, x) \rangle_T = \frac{w_0}{2} = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2}. \quad (9.45)$$

Плотность потока энергии волны – величина, численно равная энергии, переносимой волной в единицу времени через поверхность единичной площади, ориентированной перпендикулярно направлению распространения энергии волны. В случае изотропных сред направление распространения энергии совпадает с направлением распространения фронта волны:

$$S(t, x) \equiv \frac{w(t, x) c s dt}{s dt} = w(t, x) c, \quad (9.46)$$

где s – площадь поперечного сечения волны.

Вектор Умова – вектор, направление которого совпадает с направлением распространения энергии волны, а модуль равен плотности потока энергии. В случае изотропных сред:

$$\mathbf{S}(t, x) \equiv w(t, x) \mathbf{c}. \quad (9.47)$$

Интенсивность волны – среднее значение плотности потока энергии волны за период колебаний:

$$I \equiv \langle S(x, t) \rangle_T = \langle w(x, t) \rangle_T c = \frac{w_0}{2} c. \quad (9.48)$$

Заметим, что амплитуда плотности энергии упругой волны $w_0 = \xi_0^2 \rho \omega^2$ (9.44), через которую выражаются ее энергетические характеристики (9.45) – (9.48), зависит только от одной характеристики среды – ее плотности ρ . В случае распространения упругой волны в струне под плотностью энергии подразумевается ее линейная плотность, а плотность является линейной плотностью $\rho_{\text{л}}$ струны.

9.1.6. Продольный эффект Доплера (классический)

Пусть v_s и v_d – скорости движения источника звуковых гармонических волн и детектора, регистрирующего эти волны, относительно неподвижной среды, c – скорость распространения волны в среде, которая определяется свойствами среды и не зависит от скоростей источника и детектора (см. рис. 9.7).

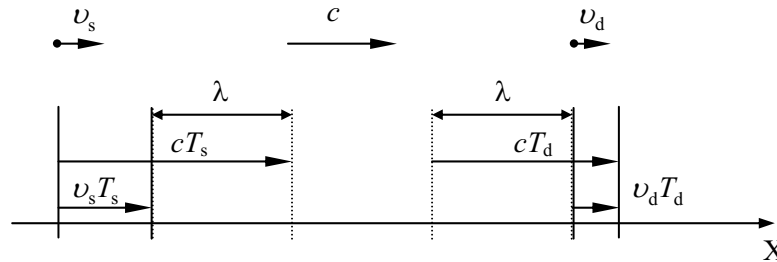


Рис. 9.7. Взаимное расположение волновых фронтов при испускании и регистрации звуковой гармонической волны

На рис. 9.7 левая черта, перпендикулярная оси X, показывает положение фронта волны, испущенной движущимся источником, в некоторый момент времени t . К моменту времени $t + T_s$ (T_s – пери-

од колебаний источника) фронт сместится на расстояние cT_s , а источник – на расстояние $v_s T_s$. Следовательно, длина волны в среде равна (рис. 9.7):

$$\lambda = cT_s - v_s T_s. \quad (9.49)$$

Пусть в некоторый момент времени t' приемник зарегистрировал фронт волны. Следующий фронт волны, находящийся от приемника на расстоянии λ , будет зарегистрирован в момент $t' + T_d$ (T_d – период колебаний приемника). Поскольку за время T_d приемник сместится на расстояние $v_d T_d$, а волновой фронт – на расстояние cT_d , то

$$\lambda + v_d T_d = cT_d. \quad (9.50)$$

Учитывая, что $T_s = 1/v_s$ и $T_d = 1/v_d$, получаем из (9.49) и (9.50) связь частот колебаний для источника v_s и приемника v_d :

$$v_d = \frac{c - v_d}{c - v_s} v_s. \quad (9.51)$$

9.1.7. Собственные колебания распределенных систем

Собственные (свободные) колебания – колебания системы, предоставленной самой себе (при постоянных внешних условиях).

Распределенная система – колебательная система с большим числом степеней свободы, характерные размеры которой

$$L > c\tau, \quad (9.52)$$

где c – скорость распространения волнового возмущения, τ – характерное время его заметного изменения.

Нормальные колебания (моды) – собственные гармонические колебания системы. Специальным выбором начальных условий можно возбудить в системе только одно (любое) из всех, собственных системе нормальных колебаний. При нормальном колебании системы все ее элементы колеблются с одной и той же частотой – нормальной частотой.

Нормальные частоты – частоты нормальных колебаний. Нормальные частоты колебательной системы определяются ее параметрами (для распределенной колебательной системы – свойствами среды и граничными условиями).

В общем случае колебания системы являются суперпозицией ее нормальных колебаний, которая определяется начальными условиями.

Стоячая волна – периодическое во времени синфазное колебание распределенной системы с характерным пространственным распределением амплитуды этих колебаний – чередованием узлов и пучностей.

Пучности стоячей волны – пространственные области, в которых частицы распределенной системы колеблются с максимальной амплитудой.

Узлы стоячей волны – пространственные области, в которых частицы распределенной системы остаются неподвижны.

В случае стоячих волн **основной модой (тоном)** называется мода с максимальной длиной волны и минимальной частотой. Остальные моды называются **обертонами**.

Стоячая волна в соответствии с принципом суперпозиции волновых полей (9.3) может быть представлена как результат суперпозиции двух бегущих гармонических волн с одинаковыми частотой ω , скоростью распространения c и амплитудой ξ_0 , распространяющихся навстречу друг другу (например, падающая и отраженная волны):

$$\begin{aligned}\xi(t, x) &= \xi_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \xi_2 \left(t + \frac{x}{c} \right) = \\ &= \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{01}) + \xi_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_{02}) = \\ &= 2\xi_0 \cos \left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2} \right) \equiv \\ &\equiv C \cos(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0),\end{aligned}\quad (9.53)$$

где φ_{01} и φ_{02} – начальные (при $t = 0$) фазы в точке с координатой $x = 0$, $C = 2\xi_0$, $\psi_0 = \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}$ и $\varphi_0 = \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}$, а $C \cos(kx + \psi_0)$ – амплитуда стоячей волны.

Пучности в волне в соответствии с (9.53) будут наблюдаться, в точках (см. рис. 9.8), координаты которых удовлетворяют условию:

$$kx + \psi_0 = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.54)$$

При этом координаты узлов (рис. 9.8) определяются соотношениями:

$$kx + \psi_0 = \frac{2n+1}{2} \pi. \quad (9.55)$$

Заметим, что между соседними узлами частицы среды колеблются в фазе, при переходе через узел фаза колебания скачкообразно изменяется на π .

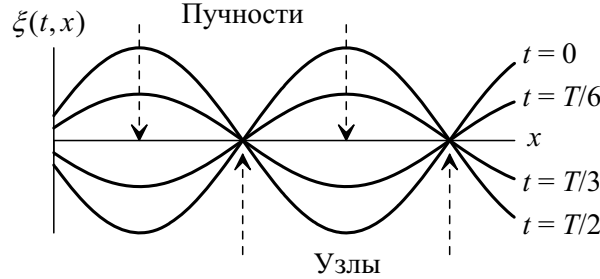


Рис. 9.8. Узлы и пучности стоячей волны

Если $\xi(t, x)$ – смещение частиц среды из положения равновесия при наличии стоячей волны, то для скорости частиц среды v и относительной деформации ε можно записать:

$$\begin{aligned} v = \dot{\xi}(t, x) &= -C\omega \cos(kx + \psi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= v_0 \cos(kx + \psi_0) \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (9.56)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = \xi'_x &= -Ck \sin(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = \\ &= \varepsilon_0 \sin(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (9.57)$$

Как видим (сравни (9.56) и (9.57) с (9.53)), узлы и пучности для скорости и смещения совпадают, а для деформаций пучности совпадают с узлами смещений, а узлы – с пучностями смещений. Узлы и пучности в волне деформаций смещены относительно узлов и пучностей в стоячей волне смещений на $\lambda/4$.

В результате суперпозиции будет наблюдаться пространственное перераспределение средней энергии волн – **интерференция**.

Для упругих продольных волн в твердом теле объемные плотности кинетической $w^k(t, x)$ и потенциальной $w^p(t, x)$ энергий

частиц тела, участвующих в волновом движении, и их средние значения $\langle w^k \rangle_T$ и $\langle w^p \rangle_T$ равны:

$$w^k(t, x) = \frac{\rho v^2(t, x)}{2} = \frac{1}{2} C^2 \rho \omega^2 \cos^2(kx + \psi_0) \sin^2(\omega t + \phi_0) = \\ = w_0^k \cos^2(kx + \psi_0) \sin^2(\omega t + \phi_0), \quad (9.58)$$

$$\langle w^k \rangle_T = \frac{w_0^k}{2} \cos^2(kx + \psi_0) = \frac{1}{4} C^2 \rho \omega^2 \cos^2(kx + \psi_0), \quad (9.59)$$

$$w^p(t, x) = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2} C^2 E k^2 \sin^2(kx + \psi_0) \cos^2(\omega t + \phi_0) = \\ = w_0^p \sin^2(kx + \psi_0) \cos^2(\omega t + \phi_0), \quad (9.60)$$

$$\langle w^p \rangle_T = \frac{w_0^p}{2} \sin^2(kx + \psi_0) = \frac{1}{4} C^2 E k^2 \sin^2(kx + \psi_0), \quad (9.61)$$

где

$$w_0^k = w_0^p = \frac{1}{2} C^2 \rho \omega^2 = \frac{1}{2} C^2 E k^2. \quad (9.62)$$

При этом средняя объемная плотность полной энергии стоячей волны однородно распределена в пространстве и равна:

$$\langle w \rangle_T = \langle w^k \rangle_T + \langle w^p \rangle_T = \frac{1}{4} C^2 \rho \omega^2 = \frac{1}{4} C^2 E k^2. \quad (9.63)$$

Пучность кинетической энергии (9.58) совпадает с узлом потенциальной (9.60) и наоборот. В отличие от бегущей волны, в стоячей волне не происходит пространственного переноса энергии, а осуществляется лишь перекачка потенциальной энергии частиц, расположенных в области узла, в кинетическую энергию частиц, расположенных в области пучности, и наоборот.

В зависимости от граничных условий в среде (в стержне, струне, столбе газа или жидкости) можно возбудить стоячие волны с определенными частотами.

Если **граница закреплена** (на границе нет движения частиц среды), то на ней смещение частиц среды ξ , а также их скорости v и объемная плотность кинетической энергии w^k равны нулю. При этом относительная деформация ε , напряжение σ , изменение давления δp и объемная плотность потенциальной энергии w^p принимают максимальное значение.

Если **граница свободна** (на границе нет внешних сил, действующих на частицы среды), то на ней относительная деформация ε , напряжение σ , изменение давления Δp и объемная плотность потенциальной энергии w^p равны нулю. При этом смещение частиц среды ξ , а также их скорости v и объемная плотность кинетической энергии w^k принимают максимальное значение.

Из граничных условий можно получить длины волн λ_n нормальных колебаний (мод), и, зная скорость распространения упругих волн c , найти частоты этих мод: $\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n}$.

В качестве примера рассмотрим случай закрепления обоих концов стержня длиной L при возбуждении в нем продольных или поперечных упругих волн.

Смещение частиц рассматриваемой среды при наличии стоячей упругой волны происходит по закону (9.53). Поскольку оба конца стержня закреплены, смещение частиц на границах среды равно нулю:

$$\xi(t, x=0) = C \cos(\psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0, \quad (9.64)$$

$$\xi(t, x=L) = C \cos(kL + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0, \quad (9.65)$$

Условия (9.64) и (9.65) должны выполняться в любой момент времени t , следовательно:

$$\cos(\psi_0) = 0; \quad (9.66)$$

$$\cos(kL + \psi_0) = 0. \quad (9.67)$$

Раскрывая косинус суммы двух углов в (9.67) с учетом (9.66), получим:

$$\cos(kL + \psi_0) = \cos(kL) \cos(\psi_0) - \sin(kL) \sin(\psi_0) = \pm \sin(kL) = 0.$$

Из полученного соотношения непосредственно следует взаимосвязь частот собственных колебаний стержня с его длиной:

$$k_n L = n\pi, \quad \frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi, \quad \frac{2\pi v_n}{c} L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, длины стоячих волн и частоты нормальных колебаний (мод) для стержня с закрепленными концами равны:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (9.68)$$

$$v_n = n \frac{c}{2L}. \quad (9.69)$$

Заметим, что в случае стоячей упругой волны в стержне с двумя закрепленными концами на длине стержня "укладывается" целое число длин полуволи:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}. \quad (9.70)$$

Аналогичное рассмотрение других случаев закрепления концов стержня при возбуждении в нем продольных или поперечных стоячих упругих волн приводит к следующим соотношениям между длиной стержня и частотами (длинами волн) нормальных колебаний.

Табл. 9.1. Длины волн и частоты нормальных колебаний в упругом стержне для различных граничных условий

Оба конца закреплены	Продольная	$L = n \frac{\lambda_n}{2}$	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	$v_n = n \frac{c}{2L}$
	Поперечная			
Один конец закреплен	Продольная	$L = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{4}$	$\lambda_n = \frac{4L}{2n + 1}$	$v_n = (2n + 1) \frac{c}{4L}$
	Поперечная			
Оба конца свободны	Продольная	$L = n \frac{\lambda_n}{2}$	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	$v_n = n \frac{c}{2L}$
	Поперечная	$L = n \lambda_n$	$\lambda_n = \frac{L}{n}$	$v_n = n \frac{c}{L}$
Закрепление в центре	Продольная	$L = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{2}$	$\lambda_n = \frac{2L}{2n + 1}$	$v_n = (2n + 1) \frac{c}{2L}$
	Поперечная			

9.2. Основные типы задач и методы их решения

9.2.1. Классификация задач

Большинство задач по теме "Бегущие и стоячие волны. Моды и нормальные частоты" можно условно отнести к следующим типам или их комбинациям. Задачи на:

- 1) бегущие волны и элементы акустики;
- 2) эффект Доплера;

3) стоячие волны, граничные условия, моды и нормальные частоты.

Как правило, один из типов задач имеет основное, другие – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

9.2.2. Общая схема решения задач

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, если это необходимо для решения задачи.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел и характеристики волн.
4. Выбрать модели тел и их движения, модели волн и характер их распространения (если это не сделано в условии задачи).

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать законы распространения бегущих (стоячих):
 - а) волн смещения,
 - б) волн скорости,
 - в) волн ускорения,
 - г) волн деформации.
2. Записать начальные и граничные условия.
3. Записать уравнения, связывающие различные характеристики волн.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечания.

В случае решения задач на эффект Доплера пп. II.1, II.2 надо опустить.

Пункты II.1 – II.3 можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от типа задачи.

9.3. Примеры решения задач

Задача 9.1

Плоская гармоническая звуковая волна с амплитудой $\xi_0 = 1 \text{ мкм}$ и частотой $\nu = 1 \text{ кГц}$ распространяется в воздухе с плотностью $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ со скоростью $c = 340 \text{ м/с}$ в направлении, составляющем углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ с осями X и Y декартовой системы координат. Найти разность фаз колебаний частиц воздуха точках с координатами $x_1 = 1 \text{ м}$, $y_1 = 1 \text{ м}$, $z_1 = 1 \text{ м}$ и $x_2 = 6 \text{ м}$, $y_2 = 6 \text{ м}$, $z_2 = 6 \text{ м}$, а также энергию, переносимую звуковой волной за время $\tau = 60 \text{ с}$ через элемент плоской поверхности площадью $s = 10 \text{ см}^2$, ориентированной перпендикулярно оси Z.

Решение

I. В соответствии с условием задачи звуковая волна является плоской и гармонической, лабораторная система отсчета и связанная с ней декартова система координат X, Y, Z задана.

II. Запишем закон распространения плоской гармонической волны (см. (9.9)):

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0), \quad (9.71)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения. Поскольку направление волнового вектора $\mathbf{k}$ совпадает с направлением вектора скорости распространения волны $\mathbf{c}$, то скалярное произведение этих векторов равно

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx \cos \alpha + ky \cos \beta + kz \cos \gamma, \quad (9.72)$$

где x, y, z – координаты точки наблюдения, $k = \frac{\omega}{c}$ и

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}. \quad (9.73)$$

Закон распространения плоской гармонической волны в направлении, составляющем углы α, β, γ с осями X, Y, Z, принимает следующий вид:

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx \cos \alpha - ky \cos \beta - kz \cos \gamma + \varphi_0). \quad (9.74)$$

Фазы колебаний в точках среды с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 равны соответственно:

$$\Phi_1 = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 = \omega t - kx_1 \cos \alpha - ky_1 \cos \beta - kz_1 \cos \gamma + \varphi_0 \quad (9.75)$$

и

$$\Phi_2 = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 = \omega t - kx_2 \cos \alpha - ky_2 \cos \beta - kz_2 \cos \gamma + \varphi_0. \quad (9.76)$$

В соответствии с определением вектора Умова (см. п. 9.1.5) искомая энергия, переносимая звуковой волной за время τ через элемент плоской поверхности площадью s , ориентированной перпендикулярно оси Z , равна:

$$E = \langle S_z \rangle_T s \tau. \quad (9.77)$$

Для среднего значения проекции вектора Умова на ось Z можно записать:

$$\langle S_z \rangle_T = \langle \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_z \rangle_T = \langle \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) \rangle_T \cdot \mathbf{e}_z = \langle S(t, \mathbf{r}) \rangle_T \cos \gamma. \quad (9.78)$$

Выразим среднее значение модуля вектора Умова через среднее значение объемной плотности энергии волны, используя (9.47):

$$\langle S(t, \mathbf{r}) \rangle_T \equiv \langle w(t, \mathbf{r}) \rangle_T c. \quad (9.79)$$

В свою очередь среднее значение объемной плотности энергии волны (см. (9.45)) равно:

$$\langle w(t, \mathbf{r}) \rangle_T = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2}. \quad (9.80)$$

В результате получены две системы уравнений (9.73), (9.75), (9.76) и (9.73), (9.77) – (9.80) для нахождения искомой разности фаз колебаний $\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ и переносимой энергии E соответственно.

III. Решая полученные системы уравнений, находим искомые в задаче величины:

$$\Delta \Phi = \frac{\omega}{c} \left((x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \cos \beta + (z_2 - z_1) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \right). \quad (9.81)$$

$$E = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2 c s \tau}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}. \quad (9.82)$$

Подстановка численных значений заданных в условии задачи величин дает:

$$\Delta\Phi \cong \pi/2,$$

$$E = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Задача 9.2

В упругой среде с плотностью $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ вдоль оси X распространяется плоская гармоническая звуковая волна с законом изменения скоростей частиц среды $v(t, x) = v_0 \cos(\omega t - kx)$. Амплитуда скорости частиц $v_0 = 1 \text{ см/с}$, а скорость волны $c = 2 \text{ км/с}$. Найти интенсивность волны, а также уравнения волн деформаций и смещений частиц среды, считая, что начальное смещение частиц $\xi(t = 0, x = 0) = 0$.

Решение

I. В соответствии с условием задачи звуковая волна является плоской и гармонической, которая распространяется вдоль оси X декартовой системы координат лабораторной системы отсчета.

II. Определим закон распространения волны смещений:

$$\xi(t, x) = \int v(t, x) dt = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - kx) + C(x), \quad (9.83)$$

Для нахождения константы интегрирования $C(x)$ в (9.83) запишем начальное условие для смещения частицы среды в точке $x = 0$:

$$\xi(t = 0, x = 0) = 0. \quad (9.84)$$

Из (9.83) и (9.84) следует, что константа интегрирования $C(x) = 0$ и закон распространения волны скоростей приобретает вид:

$$\xi(t, x) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - kx) = \xi_0 \sin(\omega t - kx), \quad (9.85)$$

где $\xi_0 = \frac{v_0}{\omega}$ – амплитуда смещений частиц среды.

Для волны деформаций в соответствии с (9.17) и (9.83) можно записать:

$$\varepsilon(t, x) = \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} = -\xi_0 k \cos(\omega t - kx) = -\varepsilon_0 \cos(\omega t - kx), \quad (9.86)$$

где $\varepsilon_0 = \xi_0 k$ – амплитуда волны деформаций.

Выражение для искомой интенсивности упругой волны непосредственно следует из (9.48) и (9.44):

$$I = \frac{w_0}{2} c = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2 c}{2}. \quad (9.87)$$

III. Искомые законы распространения волн смещений и деформаций непосредственно следуют из (9.85) и (9.86) с учетом выражения для амплитуды смещений частиц среды $\xi_0 = \frac{v_0}{\omega}$:

$$\xi(t, x) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - kx), \quad (9.88)$$

$$\varepsilon(t, x) = -\frac{v_0}{\omega} k \cos(\omega t - kx), \quad (9.89)$$

Искомая интенсивность волны, выраженная через заданные в задаче физические величины, непосредственно следует из (9.87):

$$I = \frac{v_0^2 \rho c}{2}. \quad (9.90)$$

Подставив в (9.90) численные значения амплитуды скорости частиц, плотности среды и скорости волны, получаем значение интенсивности волны:

$$I = 200 \text{ Вт/м}^2.$$

Задача 9.3

Точечный изотропно излучающий источник испускает экспоненциально затухающую гармоническую звуковую волну с частотой $\nu = 1,45$ кГц. На расстоянии $r_0 = 5$ м от источника амплитуда смещения частиц среды $\xi_0(r_0) = 50$ мкм, а в точке Р, находящейся на расстоянии $r = 10$ м от источника, амплитуда смещения $\xi_0(r)$ в $\eta = 3$ раза меньше $\xi_0(r_0)$. Найти коэффициент затухания волны δ и амплитуду колебаний скорости частиц среды $v_0(r)$ в точке Р.

Решение

I. Для решения задачи используем сферическую систему координат, в начале которой расположен источник звуковых колебаний. Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, среду будем считать изотропной, тогда звуковая волна, излучаемая точечным источником является сферической.

II. Запишем закон распространения экспоненциально затухающей сферической гармонической волны смещения (см. (9.14)):

$$\xi(t, r) = \frac{A}{r} e^{-\delta r} \cos(2\pi \nu t - kr + \varphi_0). \quad (9.91)$$

В этом случае закон распространения волны скоростей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v(t, r) &= \frac{\partial \xi(t, r)}{\partial t} = -2\pi \nu \frac{A}{r} e^{-\delta r} \sin(2\pi \nu t - kr + \varphi_0) = \\ &= -v_0(r) \sin(2\pi \nu t - kr + \varphi_0), \end{aligned} \quad (9.92)$$

где амплитуда колебаний скорости частиц среды $v_0(r)$ равна

$$v_0(r) = 2\pi \nu \frac{A}{r} e^{-\delta r}. \quad (9.93)$$

По условию задачи амплитуда смещения частиц на расстоянии r_0 от источника равно

$$\xi_0(r_0) = \frac{A}{r_0} e^{-\delta r_0}, \quad (9.94)$$

а в точке Р на расстоянии r в η раз меньше:

$$\xi_0(r) = \frac{A}{r} e^{-\delta r} = \xi_0(r_0) / \eta. \quad (9.95)$$

III. Решая систему уравнений (9.94) и (9.95), получим искомый коэффициент затухания волны δ :

$$\delta = \ln \left(\eta \frac{r_0}{r} \right) / (r - r_0). \quad (9.96)$$

Определим амплитуду колебаний скорости частиц среды в точке Р, решая систему уравнений (9.93) и (9.94) с учетом найденного коэффициента затухания δ (9.95):

$$v_0(r) = 2\pi \nu \frac{A}{r} e^{-\delta r} = 2\pi \nu \frac{\xi_0(r_0)}{\eta}. \quad (9.97)$$

Подставляя в (9.96) и (9.97) численные значения физических величин, заданные в задаче, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \delta &\cong 0,08 \text{ м}^{-1}, \\ v_0(r) &\cong 15 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

Задача 9.4

Амплитуда звуковой волны давлений $\Delta P_0 = 10$ Па. Найти среднее значение потока энергии J , попадающего в ухо человека. Считать площадь уха, ориентированного перпендикулярно направлению распространения звуковой волны, $s = 4 \text{ см}^2$. Плотность воздуха в отсутствие волны $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$, скорость звука в воздухе $c = 334 \text{ м/с}$.

Решение

I. Для решения задачи используем декартову систему координат. В качестве модели волны смещений выберем плоскую гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси X выбранной системы координат. Процесс распространения звуковой волны считаем адиабатическим.

II. Среднее значение потока энергии J , падающего перпендикулярно поверхности уха площадью s , в соответствии с формулой (9.48) равно:

$$J = s \langle w(t, x) \rangle_T c. \quad (9.98)$$

Как следует из (9.45), объемная плотность энергии плоской гармонической волны равна:

$$\langle w(t, x) \rangle_T = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2}. \quad (9.99)$$

Следовательно, для определения плотности потока энергии необходимо выразить амплитуду волны смещений ξ_0 через амплитуду волны давлений ΔP_0 , заданную в условии задачи.

Запишем закон распространения волны смещений (9.8):

$$\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (9.100)$$

В соответствии с (9.34) относительное изменение плотности воздуха, вызванное распространением звуковой волны, равно

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\xi'_x, \quad (9.101)$$

где ξ'_x находим, используя (9.100):

$$\xi'_x = \xi_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (9.102)$$

При адиабатическом процессе распространения звуковой волны в газе относительные изменения плотности среды и давления связаны соотношением (см. (9.33) и (9.36)):

$$\frac{\Delta P}{P} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (9.103)$$

где P и ρ – давление и плотность воздуха в отсутствие волны.

Для определения амплитуды звукового давления воспользуемся также формулой (9.31) для скорости звуковой волны в воздухе:

$$c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}. \quad (9.104)$$

III. Решая систему уравнений (9.101) – (9.104), находим изменение давления воздуха, вызванное распространением в нем звуковой волны:

$$\Delta P = -c^2 \rho \xi_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (9.105)$$

Следовательно, амплитуда звукового давления равна:

$$\Delta P_0 = c^2 \rho \xi_0 k = c \rho \xi_0 \omega. \quad (9.106)$$

Среднее значение потока энергии J , падающего перпендикулярно поверхности уха площадью s , получаем подстановкой в (9.98) объемной плотности энергии волны (9.99) с учетом (9.106):

$$J = s \langle w(t, x) \rangle_T c = s \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} c = s \frac{\Delta P_0^2 \rho \omega^2}{2(c \rho \omega)^2} c = s \frac{\Delta P_0^2}{2c \rho}. \quad (9.107)$$

Подставив в (9.107) численные значения физических величин, заданных в условии задачи, окончательно получим:

$$J = 4.6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}.$$

Задача 9.5

Точечный изотропно излучающий источник звука S находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр P (см. рис. 9.9).

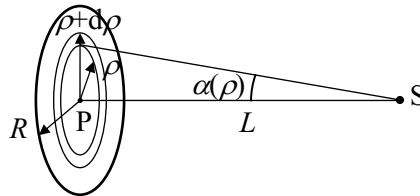


Рис. 9.9

Расстояние между точкой Р и источником S равно $L = 1$ м, радиус кольца – $R = 0,5$ м. Найти средний поток энергии через плоскую поверхность, ограниченную кольцом, если в точке Р интенсивность звуковой волны $I_0 = 30$ мкВт/м². Затуханием волн пренебречь.

Решение

I. Для решения задачи используем полярную систему координат с центром в точке Р, являющейся центром кольца.

Поскольку источник звука S является точечным и изотропно излучающим, то он возбуждает сферическую волну, амплитуда которой изменяется обратно пропорционально расстоянию от источника (см. (9.13)), а значит, интенсивность звуковой волны обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до точки наблюдения.

II. Разобьем рассматриваемую поверхность на концентрические кольцевые зоны, заключенные между окружностями с радиусами ρ и $\rho+d\rho$ ($0 \leq \rho \leq R$) с центрами в точке Р.

Поскольку интенсивность сферической волны обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до точки наблюдения, то интенсивность волны, проходящей через кольцевую зону радиусом ρ (см. рис. 9.9), равна:

$$I(\rho) = I_0 \frac{L^2}{\rho^2 + L^2}. \quad (9.108)$$

Поток энергии dJ через выделенную физически бесконечно тонкую кольцевую зону (см. рис. 9.9) в соответствии с определением интенсивности волны (см. п. 9.1.5), равен:

$$dJ = I(\rho) \cos \alpha(\rho) 2\pi\rho d\rho = I(\rho) \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} 2\pi\rho d\rho. \quad (9.109)$$

III. Искомый поток энергии J через поверхность, ограниченную кольцом радиусом R , определим, интегрируя (9.109) с учетом (9.108):

$$J = \int_0^R I(\rho) \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} 2\pi\rho d\rho = \int_0^R I_0 \frac{\pi L^3}{(\rho^2 + L^2)^{3/2}} d(\rho^2) =$$

$$= 2I_0\pi L^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R^2/L^2 + 1}} \right). \quad (9.110)$$

Подставив в (9.110) численные значения расстояния L между точкой Р и источником S, радиуса кольца R и интенсивности звуковой волны I_0 в точке Р, окончательно получим:

$$J = 20 \text{ мкВт.}$$

Задача 9.6

На оси X находятся приемник D и источник S звуковых гармонических волн с частотой $\nu_s = 2000$ Гц. Источник установлен на тележке, совершающей гармонические колебания вдоль этой оси с угловой частотой ω и амплитудой $A = 50$ см. Скорость звука $c = 340$ м/с. При каком значении ω ширина частотного интервала звука, воспринимаемого неподвижным приемником, будет составлять $\Delta\nu = 20$ Гц?

Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета, ось X декартовой системы координат которой направлена от источника к приемнику (см. рис. 6.1). Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, будем считать, что среда, в которой распространяется звуковая волна, неподвижна относительно лабораторной системы отсчета.

Изменения частоты звуковой волны, воспринимаемой неподвижным приемником, обусловлено эффектом Доплера (см. п. 9.1.6).

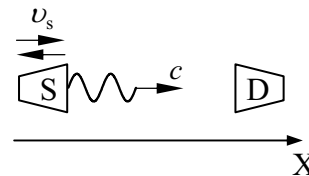


Рис. 9.10

II. Ширина частотного интервала $\Delta\nu$ звуковых волн, воспринимаемых приемником, определяется разностью максимальной и минимальной частот этих волн.

В случае, когда источник приближается к приемнику, максимальная частота $\nu_{\max}$ регистрируемой неподвижным приемником волны, в соответствии с (9.51), равна

$$\nu_{\max} = \frac{c\nu_s}{c - v_{s0}}, \quad (9.111)$$

где v_{s0} – амплитуда скорости движения источника относительно среды, c – скорость распространения волны в среде.

При движении тележки по гармоническому закону амплитуда ее скорости, а, следовательно, и амплитуда скорости источника, равна:

$$v_{s0} = A\omega. \quad (9.112)$$

В случае удаления источника от приемника частота $\nu_{\min}$, воспринимаемая приемником, будет минимальной и равной

$$\nu_{\min} = \frac{c\nu_s}{c + v_{s0}}. \quad (9.113)$$

III. Искомая ширина частотного интервала звука $\Delta\nu$, воспринимаемого неподвижным приемником, согласно (9.111) и (9.113) равна:

$$\Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min} = 2\nu_s \frac{cv_{s0}}{c^2 - v_{s0}^2}. \quad (9.114)$$

Используя взаимосвязь амплитуды скорости источника с амплитудой его колебаний вместе с тележкой (9.112), получаем:

$$\Delta\nu = 2\nu_s \frac{cA\omega}{c^2 - A^2\omega^2}. \quad (9.115)$$

Решая уравнение (9.115) относительно ω , находим ее величину:

$$\omega = \frac{-\nu_s c \pm c\sqrt{\nu_s^2 + (\Delta\nu)^2}}{A\Delta\nu}. \quad (9.116)$$

Поскольку частота колебаний является положительной величиной, то для частоты колебаний тележки окончательно получаем:

$$\omega = \frac{\nu_s c}{A\Delta\nu} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_s} \right)^2} - 1 \right). \quad (9.117)$$

В соответствии с условием задачи $\Delta\nu \ll \nu_s$, следовательно (9.117) можно упростить, ограничиваясь в разложении квадратного корня в ряд по степеням малого параметра $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_s} \right)^2$ линейным членом ряда:

$$\omega \cong \frac{c \Delta v}{2 A v_s}. \quad (9.118)$$

Подстановка численных значений физических величин, заданных в задаче, дает:

$$\omega \cong 3,4 \text{ рад/с}.$$

Задача 9.7

В упругой однородной среде с плотностью ρ распространяются две плоские гармонические продольные волны смещений со скоростью c , одинаковыми амплитудами a и частотами ω , одна – вдоль оси X , другая – вдоль оси Y некоторой декартовой системы координат. Найти среднее значение плотности потока энергии результирующего волнового поля вдоль прямой $y = x$ в плоскости XY , считая одинаковыми начальными фазы колебаний частиц среды в начале координат, обусловленных каждой волной в отдельности.

Решение

I. По условию задачи задана декартова система координат, вдоль осей X и Y которой распространяются две плоские продольные гармонические волны.

II. Запишем в соответствии с условием задачи законы распространения бегущих плоских продольных гармонических волн смещений (в соответствии с (9.8)):

$$\xi_1(t, x) = a e_x \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (9.119)$$

$$\xi_2(t, y) = a e_y \cos(\omega t - ky + \varphi_0), \quad (9.120)$$

где e_x и e_y – единичные векторы вдоль осей X и Y , $k = \frac{\omega}{c}$ – волновое число для обеих волн, φ_0 – начальные фазы колебаний частиц среды в начале координат, обусловленных каждой волной в отдельности.

Определим амплитуду A результирующего волнового поля смещений вдоль прямой $y = x$ в плоскости XY :

$$\begin{aligned} \xi(t, x, y) &= \xi_1(t, x) + \xi_2(t, y) = \\ &= a e_x \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + a e_y \cos(\omega t - ky + \varphi_0) = \\ &= a e_x \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + a e_y \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= a(e_x + e_y) \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \end{aligned} \quad (9.121)$$

Направим вспомогательную ось Γ вдоль прямой $y = x$ в плоскости XY и обозначим единичный вектор вдоль этого направления как $\mathbf{e}_\gamma$. Поскольку $\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y = \sqrt{2}\mathbf{e}_\gamma$, то

$$\xi = a\sqrt{2}\mathbf{e}_\gamma \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A\mathbf{e}_\gamma \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (9.122)$$

где амплитуда волнового поля A вдоль оси Γ равна:

$$A = \sqrt{2}a. \quad (9.123)$$

Подставляя в выражение (9.122) для смещения частиц среды вдоль оси Γ соотношение координат вдоль осей X и Γ — $x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$, получаем:

$$\xi = A\mathbf{e}_\gamma \cos\left(\omega\left(t - \frac{\gamma}{\sqrt{2}c}\right) + \varphi_0\right). \quad (9.124)$$

Как видим, волновое поле вдоль оси Γ можно интерпретировать как бегущую продольную волну смещений с амплитудой A (9.123) и скоростью

$$c_\gamma = \sqrt{2}c. \quad (9.125)$$

Среднее значение плотности потока энергии волнового возмущения вдоль прямой $y = x$ в соответствии с (9.48) можно записать в виде:

$$I = \langle S(x, t) \rangle_T = \frac{A^2 \rho \omega^2}{2} c_\gamma. \quad (9.126)$$

III. Подставив в (9.126) амплитуду колебаний A (9.123) и скорость распространения волны c_γ (9.125), получим искомое среднее значение плотности потока энергии результирующего волнового поля вдоль прямой $y = x$ в плоскости XY :

$$I = \sqrt{2}a^2 \rho \omega^2 c. \quad (9.127)$$

Задача 9.8

Источник звуковых колебаний S с частотой $\nu_0 = 1700$ Гц находится между плоским отражателем и приемником D (см. рис. 9.11). Источник и приемник неподвижны и расположены на одной и той же нормали к отражателю, который удаляется от источника со скоростью $u = 6$ см/с. Скорость звука $c = 340$ м/с. Найти частоту биений, регистрируемых приемником.

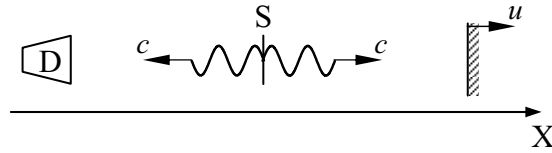


Рис. 9.11

Решение

I. Выберем направление оси X декартовой системы координат, совпадающим с направлением движения отражателя, как показано на рис. 9.11. Приемник регистрирует суперпозицию двух звуковых волн: испущенной источником и отраженной от движущегося отражателя.

II. При решении задачи воспользуемся формулой (9.51), связывающей частоты колебаний движущихся источника и приемника звуковой волны:

$$\nu_d = \frac{c - v_d}{c - v_s} \nu_s, \quad (9.128)$$

где v_s и v_d – скорости движения источника и приемника относительно среды, c – скорость распространения волны в среде, ν_s – частота излучаемой источником звуковой волны, ν_d – частота волны, которую регистрирует детектор. Все скорости направлены в одну сторону.

Частота волны, которую зафиксировал бы детектор, находящийся на движущемся отражателе, определяется в соответствии с (9.128) выражением:

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{c - v_d}{c} = \nu_0 \frac{c - u}{c}. \quad (9.129)$$

Считая, что отражатель не меняет частоту волны при отражении, запишем выражение для частоты волны, отраженной от отражателя и зарегистрированной неподвижным приемником согласно (9.128):

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c}{c + v_s} = \nu_0 \frac{c - u}{c + u}. \quad (9.130)$$

Знак плюс в знаменателе формулы (9.130) обусловлен тем, что в этом случае скорость отражателя (источника отраженной

волны) и скорость отраженной волны направлены в противоположные стороны.

Для частоты биений (см. решение задачи 8.10 в Главе 8), возникающих в результате суперпозиции волны с частотой ν_0 , испущенной неподвижным источником, и волны с частотой ν_2 , отраженной от движущегося отражателя, запишем:

$$\nu_{\text{биен}} = |\nu_0 - \nu_2|. \quad (9.131)$$

III. Решая систему уравнений (9.130) и (9.131), находим искомую величину частоты биений:

$$\nu_{\text{биен}} = \nu_0 - \nu_0 \frac{c-u}{c+u} = \nu_0 \frac{2u}{c+u}. \quad (9.132)$$

Подставляя в (9.132) заданные в условии задачи численные значения физических величин, получим значение частоты биений, зарегистрированных приемником:

$$\nu_{\text{биен}} = 0,6 \text{ Гц}.$$

Задача 9.9

Стальная струна длиной $L = 110$ см, плотностью $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ и диаметром $d = 1$ мм натянута между полюсами электромагнита. При пропускании по струне переменного тока частотой $\nu = 256$ Гц в ней возбуждается упругая поперечная волна, причем на длине струны "укладывается" $n = 5$ полуволн. Найти силу натяжения струны.

Решение

I. Будем считать, что относительное изменение силы натяжения струны, вызванное упругой поперечной волной, пренебрежимо мало (см. п. 9.1.4.Б). Задачу решаем в лабораторной системе отсчета, ось X декартовой системы координат которой направим вдоль струны (см. рис. 9.12).

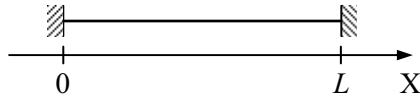


Рис. 9.12

II. Запишем взаимосвязь скорости распространения упругих поперечных волн в струне и силы натяжения струны (см. (9.27) в п. 9.1.4.В)

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}, \quad (9.133)$$

где площадь поперечного сечения струны S равна:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (9.134)$$

Для нахождения искомой силы натяжения струны необходимо определить скорость распространения упругих поперечных волн в струне (см. (9.133)).

По условию задачи на длине струны "укладывается" n полу-волн:

$$L = n \frac{\lambda}{2}. \quad (9.135)$$

Частота колебаний и длина волны связаны соотношением:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (9.136)$$

III. Решая систему уравнений (9.133) – (9.136), получим искомую силу натяжения струны:

$$T = \frac{\pi d^2 L^2 \nu^2 \rho}{n^2}. \quad (9.137)$$

Подставляя численные значения заданных в условии задачи физических величин, входящих в (9.137), окончательно получим:

$$T \cong 77,7 \text{ Н}.$$

Задача 9.10

Найти частоты ν_n , на которых будет резонировать труба длиной $L = 1,7$ м, закрытая с одного конца, если скорость звука в воздухе равна $c = 340$ м/с.

Решение

I. Частоты, на которых будет резонировать труба, совпадают с частотами нормальных колебаний частиц воздуха в трубе, образующих стоячие волны.

Выберем декартову систему координат лабораторной системы отсчета, связанной с трубой, ось X которой направим вдоль трубы (см. рис. 9.13).

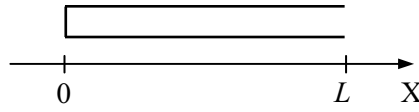


Рис. 9.13

II. Запишем уравнение стоячей волны (см. (9.53)):

$$\xi(t, x) = C \cos(kx + \psi_0) \cos(2\pi\nu t + \varphi_0). \quad (9.138)$$

Поскольку у закрытого конца трубы частицы не испытывают смещения из положения равновесия, то в любой момент времени:

$$\xi(t, 0) = C \cos(\psi_0) \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = 0. \quad (9.139)$$

Частицы, находящиеся вблизи открытого конца трубы, испытывают одинаковое максимальное смещение из положения равновесия. При этом не происходит изменение плотности воздуха. Следовательно, в соответствии с (9.34), можно записать:

$$\left. \frac{\Delta \rho}{\rho} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (9.140)$$

Подставляя результат дифференцирования (9.138) по x в (9.140), получим:

$$\left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = kC \sin(kL + \psi_0) \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = 0. \quad (9.141)$$

III. Решая совместно систему уравнений (9.139) и (9.141) для любого момента времени, получим:

$$\cos\left(\frac{2\pi\nu}{c} L\right) = 0. \quad (9.142)$$

Следовательно, искомые частоты нормальных колебаний частиц воздуха в трубе, на которых резонирует труба, равны:

$$\nu_n = (2n + 1) \frac{c}{4L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.143)$$

Заметим, что такими же собственными частотами обладает стержень, закрепленный с одного конца (см. табл. 9.1).

Для длин стоячих волн, соответствующих этим нормальным колебаниям, можно записать:

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n+1} \text{ или } L = (2n+1) \frac{\lambda_n}{4}. \quad (9.144)$$

Полученное соотношение (9.144) означает, что при образовании стоячей волны в трубе, закрытой с одного конца, на длине трубы должно "укладываться" нечетное число четвертей длин волн.

Подставляя численные значения заданных в условии задачи физических величин, входящих в (9.143), получим искомые значения частот, на которых будет резонировать труба:

$$\nu_n = (50 + 100n) \text{ Гц}.$$

9.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Найти волновой вектор $\mathbf{k}$ и скорость $\tilde{n}$ упругой волны, в которой смещение частиц среды меняется по закону: $\xi = \xi_0 \cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)$, заданному в декартовой системе координат.

Ответ: $\mathbf{k} = \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z$, $c = \omega / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты декартовой системы координат.

Задача 2

Упругая продольная волна распространяется вдоль стержня с плотностью $\rho = 4,0 \text{ г/см}^3$ и модулем Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$. Найти скорость v частиц среды в точках, где относительная деформация стержня $\varepsilon = 0,01$.

Ответ: $v = -e\varepsilon\sqrt{E/\rho}$, где $\mathbf{e}$ – единичный вектор вдоль направления распространения волны; $|\mathbf{v}| = 50 \text{ м/с}$.

Задача 3

Изотропно излучающий точечный источник звука, мощность которого $N = 0,1 \text{ Вт}$, находится в центре полого кругового цилиндра радиусом $R = 1 \text{ м}$ и высотой $h = 2 \text{ м}$. Полагая, что стенки цилиндра полностью поглощают звук, найти среднее значение потока

энергии J звуковой волны, падающей на боковую поверхность цилиндра.

Ответ: $J = N / \sqrt{1 + (2R/h)^2} = 0,07$ Вт.

Задача 4

Человек с хорошим слухом может слышать звук с колебанием давления до $\Delta P = 10^{-4}$ Па при частоте $\nu = 2$ кГц. Найти амплитуду смещения частиц воздуха ξ_0 в такой волне. Атмосферное давление считать равным $P = 10^5$ Па, плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м³ и показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.

Ответ: $\xi_0 = \frac{\Delta P}{2\pi\nu\sqrt{\gamma P\rho}} \cong 1,9 \cdot 10^{-11}$ м.

Задача 5

В однородной среде распространяется плоская экспоненциально затухающая гармоническая упругая волна. Найти разность фаз колебаний в точках, где амплитуды смещения частиц среды отличаются на $\eta = 1\%$, если коэффициент затухания $\delta = 0,42$ м⁻¹ и длина волны $\lambda = 50$ см.

Ответ: При $\Delta\varphi = -(2\pi/\delta\lambda)\ln(1-\eta) \cong 2\pi\eta/\delta\lambda \cong 0,3$ рад.

Задача 6

Медный стержень длиной $L = 50$ см закреплен в середине. Найти частоты продольных собственных колебаний в диапазоне частот от 20 до 50 кГц. Модуль Юнга для меди $E = 1,2 \cdot 10^{11}$ Н/м², а плотность $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $\nu_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{l} = 7,34 \left(n + \frac{1}{2} \right)$ кГц; четыре колебания с частотами 25,7; 33,0; 40,4 и 47,7 кГц.

Задача 7

Две струны, сделанные из одного материала, имеют одинаковую длину и натяжение. Как относятся периоды их собственных колебаний, если диаметр одной струны в два раза больше диаметра другой.

Ответ: Период колебания тонкой струны в 2 раза меньше.

Задача 8

Стержень с закрепленными концами имеет длину $L = 3$ м. В стержне возбуждается звуковая волна, основная частота которой равна $\nu_0 = 700$ Гц. Какова скорость звука c в стержне? Какие обертоны может иметь звук, издаваемый стержнем?

Ответ: $c = 2\nu_0 L = 4200$ м/с; обертоны – $\nu_n = n\nu_0$, где $n = 2, 3 \dots$

Задача 9

В незакрепленном алюминиевом стержне длиной $L = 1$ м возбуждается поперечная упругая волна. Найти частоты собственных колебаний стержня в диапазоне частот от 1 кГц до 10 кГц. Плотность алюминия $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, а модуль сдвига $G = 26$ ГПа.

Ответ: $\nu_n = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \cdot \frac{n}{L} = 3,1n$ кГц; три колебания с частотами 3,1; 6,2 и 9,3 кГц.

Задача 10

Гидролокатор подводной лодки, всплывающей вертикально, излучает короткие звуковые импульсы длительностью τ_0 . Найти скорость U всплытия лодки, если длительность сигналов, принятых приемником гидролокатора после отражения от горизонтальной поверхности дна равна τ , а скорость распространения ультразвука в воде равна c .

Ответ: $U = c \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0}$.

ЛИТЕРАТУРА

Учебники

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с.
5. С. Э. Хайкин. Физические основы механики. – СПб.: «Лань», 2008. – 768 с.
6. И. И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. – СПб.: «Лань», 2009. – 576 с.
7. В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с.

Сборники задач

1. Сборник задач по общему курсу физики. В пяти книгах. Кн. I. Механика. Под ред. И. А. Яковлева. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006. – 240 с.
2. И. Е. Иродов. Задачи по общей физике. – СПб.: «Лань», 2006. – 416 с.
3. Сборник задач по общему курсу физики. В трех частях. Ч. 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика. Под ред. В. А. Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2002. – 448 с.

Учебные пособия

1. Методика решения задач механики. Под ред. А. Н. Матвеева. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1980. – 160 с.
2. Л. П. Авакянц, Р. Э. Шихлинская, А. П. Штыркова. Разработка семинаров по механике и теории относительности. Под ред. А. Н. Матвеева. Изд-во Моск. ун-та, 1984 г. 148 с.
3. Л. П. Авакянц, Р. Э. Шихлинская, А. П. Штыркова. Разработка семинаров по механическим колебаниям и волнам в упругой среде. Под ред. А. Н. Матвеева. Изд-во Моск. ун-та, 1986 г. 76 с.

Справочная литература

1. Физический энциклопедический словарь. Гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: «Советская энциклопедия, 1984. – 944 с.
2. Физическая энциклопедия. В пяти томах. – М.: «Советская энциклопедия, 1988 – 1998. – 3538 с.
3. Физические величины: Справочник. Под ред. И. С. Григорьева и Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

Учебное издание

*РУСАКОВ Вячеслав Серафимович
СЛЕПКОВ Александр Иванович
НИКАНОРОВА Елена Александровна
ЧИСТЯКОВА Наталия Игоревна*

МЕХАНИКА. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Оформление переплета: Е.В. Брылина

Подписано в печать 15.12.2009 г.
Формат 60х90.16. Объем 23 п. л. Тираж 500 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, ГСП1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в Типографии МГУ им. М.В. Ломоносова